Перелік задач до спецкурсу “Калібрувальні теорії”

I. Квантова механіка на основі формалізму фейнманівського інтегралу по траєкторіям.

1. Показати, що при $t \to 0_+$ фейнманівський пропагатор для вільної частинки

$$K(q_f\, t\,|\, q_i\, 0) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{im(q_f - q_i)^2}{2\hbar t}\right)$$

зводиться до дельта-функції, тобто

$$K(q_f\, t\,|\, q_i\, 0) \to \delta(q_f - q_i), \qquad t \to 0_+.$$

2.Обчислити Фур'є перетворення фейнманівського пропагатора для вільної частинки

$$G(q_f, q_i; E) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int\limits_0^\infty dt K(q_f\, t\,|\, q_i\, 0) e^{iEt/\hbar}, \quad \mathrm{Im} E > 0.$$

Порахувати густину станів

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi L} \mathrm{Im}\mathrm{Tr} G(E + i\epsilon), \quad \epsilon \to 0_+,$$

$$\mathrm{Tr} G(E) = \int\limits_{-L/2}^{L/2} dq\, G(q, q; E).$$

3. Обчислити фейнманівський пропагатор для гармонічного осцилятора.

Відповідь:

$$K(q_f\, t\,|\, q_i\, 0) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega t}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar \sin\omega t}\left[\left(q_f^2 + q_i^2\right)\cos\omega t - 2q_f q_i\right]\right\}, \qquad t < \pi/\omega.$$

(ω — частота осцилятора, тобто лагранжіан має вигляд: $L = \dfrac{m\dot{q}^2}{2} - \dfrac{m\omega^2}{2} q^2$).

4. Обчислити фейнманівський пропагатор для частинки у зовнішньому постійному полі з лагранжіаном

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} + fq, \qquad f = \mathrm{const}.$$

Відповідь:

$$K(q_f\, t\,|\, q_i\, 0) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Big[\frac{m(q_f - q_i)^2}{2t} + \frac{1}{2} f t(q_f + q_i) - \frac{f^2 t^3}{24m}\Big]\right\}.$$

5. Обчислити фейнманівський пропагатор для зарядженної частинки в постійному зовнішньому магнітному полі лагранжіан якої має вигляд:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

Вибіраючи симетричну калібровку $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (B/2)(-y, x, 0)$, одержати відповідь:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau) \; &= \; \frac{m\omega}{4\pi i\hbar \sin(\omega\tau/2)} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}} \exp\left\{\frac{ie}{\hbar}\int\limits_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\xi) d\boldsymbol{\xi}\right\} \\ &\times \; \exp\left\{\frac{im\omega}{4\hbar}\cot(\omega\tau/2)[(x - x')^2 + (y - y')^2] + \frac{im(z - z')^2}{2\hbar\tau}\right\}, \end{aligned}$$

де $\tau = t - t'$, $\omega = eB/mc$ - циклотронна частота. Інтегрування в фазовому множнику в експоненті провадиться вздовж прямої лінії, яка з'єднує точки $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$.

6. Нехай задано хвильову функцію гармонічного осцилятора в момент часу $t = 0$ у вигляді

$$\Psi(q, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(q - a)^2\Big].$$

Використовуючи пропагатор гармонічного осцилятора показати, що в момент часу t вона буде мати вигляд:

$$\Psi(q, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\Big(-\frac{i\omega t}{2}\Big) \exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}\Big(q^2 - 2aqe^{-i\omega t} + \frac{1}{2}a^2\big(1 + e^{-2i\omega t}\big)\Big)\Big],$$

або, що еквівалентно,

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) \; &= \; \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\Big(-\frac{i\omega t}{2}\Big) \exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}\big(q - a\cos\omega t\big)^2\Big] \\ &\times \; \exp\Big[-\frac{im\omega}{2\hbar}\Big(2aq\sin\omega t - \frac{a^2}{2}\sin 2\omega t\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Знайти розподіл густини ймовірності $|\Psi(q, t)|^2$.

7. Нехай хвильова функція вільної частинки в момент часу $t = 0$ задана у вигляді розподілу

$$\Psi(q, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{q^2}{4\sigma^2}\Big), \qquad \sigma \text{ — дисперсія.}$$

Показати, що в момент t розподіл буде мати вигляд:

$$\Psi(q,t)=\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2(t)}}\exp\Big(-\frac{q^2}{4\sigma^2(t)}\Big)\exp\Big(\frac{i\hbar t q^2}{8m\sigma^2\sigma^2(t)}\Big)\exp\Big(-\frac{i}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\hbar t}{2m\sigma^2}\Big),$$

де

$$\sigma^2(t)=\sigma^2+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2\sigma^2},$$

тобто хвильовий пакет розпливається з часом.

8. Порахувати багатовимірний інтеграл

$$I_{r_1r_2r_3r_4}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}dx_ix_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)},$$

де $x_{r_1},x_{r_2},x_{r_3},x_{r_4}$ деякі змінні з множини $x_i, i=1,\dots N$, і (x,Ax) є наступна квадратична форма

$$(x,Ax)=\sum_{i,j=1}^{N}x_iA_{ij}x_j.$$

9. Явним обчисленням показати, що інтеграл по грасмановим змінним для $N=4$ має вигляд

$$I_N(M)=\int d\theta_1\dots d\theta_N\exp\left(-\frac{1}{2}\theta^TM\theta\right)=(\mathrm{det}M)^{1/2},$$

де M - антисиметрична матриця, $\theta=(\theta_1,\theta,\dots\theta_N)$.

II. Квантування гамільтонових систем із в'язями.

1. Обчислити дужку Пуассона (ДП) у неканонічних координатах $\eta_\alpha=(\phi_a,q_i^*,p_a,p_i^*)$, де ϕ_a — зв'язки 1-го роду, p_a — імпульси, спряжені до ϕ_a,

$$\{f,g\}=\sum_{\alpha,\beta}\{\eta_\alpha,\eta_\beta\}\frac{\partial f}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial g}{\partial\eta_\beta}.$$

Показати, що на підмноговиді Γ^*, що визначається умовами $\phi_a=0$, $p_a=0$, ДП зводиться до

$$\{f,g\}_{\Gamma^*}=\sum_i\Big(\frac{\partial f^*}{\partial q_i^*}\frac{\partial g^*}{\partial p_i^*}-\frac{\partial f^*}{\partial p_i^*}\frac{\partial g^*}{\partial q_i^*}\Big),$$

де незалежними змінними є q_i^*, p_i^* і

$$f^*=f\big(q_a(q_i^*,p_i^*),q_i^*,0,p_i^*\big),$$

$$g^*=g\big(q_a(q_i^*,p_i^*),q_i^*,0,p_i^*\big),$$

а функції $q_a(q_i^*, p_i^*)$ визначаються, розв'язуючи в'язі

$$\phi_a(q_a, p_a = 0, q_i^*, p_i^*) = 0.$$

2. Нехай задано лагранжіан

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2.$$

Обчислити гесіан (матрицю других похідних за швидкостями), знайти первинні зв'язки та визначити вид калібрувального перетворення, що залишає лагранжіан інваріантним. Знайти розв'язки лагранжевих рівнянь руху з початковими умовами

$$x(0) = \alpha, \quad y(0) = \beta, \quad \dot{x}(0) = \beta, \quad \dot{y}(0) = \gamma$$

і показати, що в розв'язку є функціональна довільність (тобто у розв'язок входить довільна функція).

3. Нехай задано лагранжіан

$$L = -\frac{1}{2}q^2 + q\dot{x} + \dot{q}\dot{y}.$$

Обчислити ранг гесіана (матриці других похідних за швидкостями), знайти в'язі та гамільтоніан і визначити вид калібрувального перетворення, що залишає лагранжіан інваріантним.

4. Розглянути лагранжіан

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2m\dot{t}} - \frac{m\omega^2}{2}\dot{t}q^2,$$

де змінні $q(\tau)$ і $t(\tau)$ є функціями τ, і показати інваріантність дії $S = \int d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau))$ відносно калібрувальних перетворень з довільною функцією $\lambda(\tau)$,

$$q(\tau) \to q'(\tau) = q(\lambda(\tau)), \quad t(\tau) \to t'(\tau) = t(\lambda(\tau)).$$

Знайти в'язі цієї системи.

5. Дужка Дірака визначається як

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \theta_\alpha\} \Delta^{-1}_{\alpha\beta} \{\theta_\beta, g\},$$

де $\{\cdot, \cdot\}$ є дужка Пуасона, θ_α є в'язі другого класу, і $\Delta^{-1}_{\alpha\beta}$ є матриця обернена до матриці $\Delta_{\alpha\beta} = \{\theta_\alpha, \theta_\beta\}$.

Показати, що дужка Дірака задовільняє тотожність Якобі,

$$\{f, \{g, h\}_D\}_D + \{g, \{h, f\}_D\}_D + \{h, \{f, g\}_D\}_D = 0.$$

6.Розглянемо рух вільної частинки по поверхні Σ^{N-1} в N-вимірному просторі заданою рівнянням $f(x) = 0$, де $f(x)$ є гладкою функцією декартових координат x_i, $i = 1, 2, \dots N$ в R^N з нормальним вектором $\mathbf{n}(x) = \nabla f(x)$, $\mathbf{n}^2 = 1$. Система описується вільним гамільтоніаном $H = \mathbf{p}^2/2m$ з в'язями

$$\chi_1(x, p) \equiv f(x)(= 0), \quad \chi_2(x, p) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}(= 0).$$

Порахувати дужки Дірака $\{x_i, x_j\}_D, \{x_i, p_j\}_D, \{p_i, p_j\}_D$ і знайти рівняння руху.
Показати, що

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0, \quad \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0,$$

тобто рух частинки відбувається в дотичній площині і частинка не відчуває сили в дотичній площині.

Відповідь:

$$\{x_i, x_j\}_D = 0, \quad \{x_i, p_j\}_D = \delta_{ij} - n_i n_j, \quad \{p_i, p_j\}_D = (n_j n_{k,i} - n_i n_{k,j}) p_k.$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \{\mathbf{x}, H\}_D = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \{\mathbf{p}, H\}_D = -\frac{\mathbf{n}}{m}(\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}).$$

7. Розглянути попередню задачу руху частинки з масою $m = 1$ по поверхні сфери $q_i^2 = 1$ в n-вимірному просторі в лагранжевому формалізмі. Обмеження руху по поверхні сфери в n-вимірному просторі зручно враховувати за допомогою множника Лагранжа, тобто маємо лагранжіан

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_i^2 - F(q_i^2 - 1)\right),$$

де по індексу i іде сумовання. Показати, що матриця $\partial^2 L/\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b$ сингулярна ($q_a = (q_i, F)$, $a = 1, 2, \dots n + 1$).

Очевидно, первинна в'язь $\phi^1 = p_F = \partial L/\partial \dot{F} \approx 0$ і первинний гамільтоніан

$$H = p_i \dot{q}_i + p_F \dot{F} - L + \lambda p_F.$$

Знайти з умови збереження в'язів у часі додаткові в'язі ϕ^2, ϕ^3, ϕ^4, множник Лагранжа λ. Показати, що матриця дужок Пуасона

$$C^{AB} = \left\{\phi^A, \phi^B\right\}$$

має вигляд

$$C^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2\mathbf{p}^2 \\ -1 & 0 & -2\mathbf{p}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену до ней матрицю, побудувати дужку Дірака и порахувати її для всіх канононічних змінних q_i, F, p_i, p_F.

8. Розглянути дію вільної релятивістської частинки у вигляді

$$S = -\frac{1}{2}\int d\tau\sqrt{g}\left(g^{-1}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu + m^2\right).$$

Встановити вид локальних перетворень змінних $(\tau, g(\tau) \to \tau', \tilde{g}(\tau'))$, які зберігають форму дії. Використовуючи рівняння Лагранжа-Ейлера для g, показати, що дія еквівалентна іншої відомої дії для релятивістської частинки

$$S = -m\int d\tau\sqrt{\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu}.$$

Визначити канонічні імпульси до змінних x^μ, g і зробити перехід до гамільтонового формалізму. З умови збереження в'язів у часі знайти всі нетривіальні в'язі (їх всього повинно бути дві ϕ^1, ϕ^2). Використовуючи дужки Пуасона для канонічних змінних,

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \quad \{g, p_g\} = 1$$

(всі інші дорівнюють нулеві), встановити належність в'язів до першого чи другого класу.

Розглянути умови фіксації калібровки

$$\chi^1 = g - \frac{1}{m^2} \approx 0, \quad \chi^2 = \tau - x^0 \approx 0,$$

і порахувати матрицю 4×4 з дужок Пуасона $C^{AB} = \left\{\phi^A, \phi^B\right\}$, де $\phi^A = (\phi^1, \phi^2, \chi^1, \chi^2)$. Побудувати дужку Дірака і порахувати її для всіх змінних x^μ, g, p_ν, p_g між собою.

9.Розглянути лагранжіан першого порядку по похідним

$$L(q_a, \dot{q}_a) = \dot{q}_a K^a(q_a) - V(q_a), \quad a = 1, 2, \ldots, 2N,$$

де функція координат $K^a(q_a)$ така, що матриця $\Delta^{ab} = -\Delta^{ba} = \partial^a K^b - \partial^b K^a$ має детермінант відмінний від нуля, $\det\Delta \neq 0$. Очевидно, гесіан

$$M^{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_a\partial\dot{q}_b} = 0.$$

Показати, що лагранжеві рівняння можна привести до виду

$$\dot{q}_a = \left(\Delta^{-1}\right)_{ab} \partial^b V(q_a).$$

Зробити перехід до гамільтонового формалізму: знайти гімільтоніан H_0 і первинні в'язі ϕ^a. Показати, що матриця з дужок Пуасона в'язів

$$\left\{\phi^a, \phi^b\right\} = \Delta^{ab},$$

тобто, первинні в'язі належать до в'язів другого класу.

Використовуючи гамільтонін по Діраку

$$H = H_0 + u_a \phi^a,$$

де $u_a(q_a, p_a, t)$ довільні функції координат, імпульсів і часу, визначити ці функції з умови збереження в'язів у часі, $\dot{\phi}^a = \{\phi^a, H\} \approx 0$. Побудувати дужку Дірака і показати, що гамільтонові рівняння

$$\dot{q}_a = \{q_a, H\}_D$$

співпадають з лагранжевими рівняннями руху.

10. Розглянути лагранжіан Прока масивного векторного поля в формуліровці Штюкельберга

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 \left(A_\mu + \partial\phi\right)^2,$$

який інваріантний відносно локальних калібрувальних перетворень

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \epsilon(x), \quad \phi(x) \to \phi'(x) = \phi - \epsilon(x).$$

Знайти гамільтоніан, в'язі, та порахувати дужки Пуасона в'язів між собою і з гамільтоніаном. Показати, що

$$\Omega_\epsilon(t) = \int d^3x \left[\dot{\epsilon}\Pi^0 - \epsilon\left(\partial_i \Pi^i + \pi_\phi\right)\right]$$

є генератором калібрувальних перетворень, тобто

$$\delta A^\mu = \{A^\mu, \Omega_\epsilon\} = \partial^\mu \epsilon, \quad \delta\phi = \{\phi, \Omega_\epsilon\} = -\epsilon.$$

Π^μ та π_ϕ є канонічно спряжені імпульси до зміних A_μ та ϕ, відповідно.

11. В калібровці Прока генеруючий функціонал записується у вигляді

$$Z = \int DA^\mu D\phi \exp\left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 \left(A_\mu + \partial\phi\right)^2 - \lambda\phi^2 \right) \right\},$$

де доданок $\lambda\phi^2$ фіксує калібровку і λ є калібрувальний параметр. Утворюючи мультіплет $\Psi^t = (A^\mu, \phi)$, записати дію у вигляді

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \Psi^t \mathcal{O} \Psi,$$

і знайти обернений оператор (пропагатор) до оператора $\mathcal{O}$ в квадратичній формі дії.

Відповідь.

$$D(x) = \frac{1}{i}\mathcal{O}^{-1} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} D(p), \quad D(p) = \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2-m^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + \frac{i}{\lambda} p^\mu p^\nu & \frac{1}{\lambda} p^\nu \\ -\frac{1}{\lambda} p^\mu & \frac{i}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

12. Показати, що дія вільної релятивістської струни може бути записана у вигляді

$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-G}, \qquad \left(\text{натяг струни } T = \frac{1}{2\pi\alpha'}\right)$$

де $G = \det G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$, і похідні $\partial_1 \equiv \partial_\tau$, $\partial_2 \equiv \partial_\sigma$, $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$.

13. Показати, що для вільної релятивістської струни первинними в'язями є

$$\phi_1 = P_\mu X'^\mu = 0, \qquad \phi_2 = P_\mu P^\mu + \frac{X'_\mu X'^\mu}{(2\pi\alpha')^2} = 0,$$

і що вторинні зв'язки відсутні.

Обчислити дужку Пуассона зв'язків $\{\phi_1, \phi_2\}$, використовуючи елементарну ДП,

$$\{X_\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')\} = \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma').$$

14. Розглянути дію

$$S = -\frac{T}{2} \int d\tau\, d\sigma \sqrt{-h}\, h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$$

для струни $X^\mu(\tau,\sigma)$ на світовій поверхні (τ,σ) з метричним тензором $h_{\alpha\beta}$ ($h^{\alpha\beta}$ — метричний тензор, обернений до матриці $h_{\alpha\beta}$), $h = \det h_{\alpha\beta}$.

Використовуючи польові рівняння для змінної $h^{\alpha\beta}$,

$$\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = 0 \;\Rightarrow\; \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu = 0$$

та вводячи тензор

$$G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu,$$

показати, що

$$\det G_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(h^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta})^2 h.$$

Тим самим початкова дія еквівалентна (на класичному рівні) дії струни Намбу-Гото:

$$S = -T\int d\tau\, d\sigma \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}}.$$

Примітка. При виведенні польових рівнянь використовувати варіацію

$$\frac{\delta \det h_{\alpha\beta}}{\delta h^{\alpha\beta}} = -h \cdot h_{\alpha\beta},$$

яку слід довести.

15. Показати, що тензор напруженості електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$ є величиною 1-го роду, тобто його ДП із зв'язками $\phi_1 = \pi^0$, $\phi_2 = \partial_i \pi_i$ обертаються на нуль (у слабкому розумінні).

16. У теорії полів Янга-Міллса функції

$$G_a = \partial_i E_a^i - g f_{abc} E_b^i A_{ic},$$

f_{abc} — структурні константи, є зв'язками 1-го роду. Показати, що ці зв'язки задовольняють алгебрі

$$\{G_a(\vec{x}), G_b(\vec{y})\} = g f_{abc} G_c(\vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$

$\{\cdot,\cdot\}$ — ДП.

17. Порахувати наступну дужку Пуасона в теорії полів Янга-Міллса,

$$\{\partial_i A_i^a(\vec{x}), D_j^{bc}\Pi_j^c(\vec{y})\} = \partial_i^x D_i^{xab}\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$

де $A_i^a(\vec{x})$- вектор-потенціал поля Янга-Міллса, $\Pi_j^c(\vec{y})$- густина відповідного узагальненого імпульса, D_j^{bc}- коваріантна похідна.

III. Калібрувальні теорії (електродинаміка та поля Янга-Міллса).

1. Знайти детермінант Фаддєєва-Попова у випадку, коли вибрано калібровку Намбу,

$$G = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2} A_\mu A^\mu.$$

2. Знайти пропагатор фотона у довільній коваріантній калібровці, який задовольняє рівнянню

$$-i\Big[g^{\mu\nu}\Box_x - \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\partial_x^\mu \partial_x^\nu\Big] D_{\nu\rho}(x-y) = \delta^\mu_\rho \delta(x-y).$$

3. Показати, що інфінітезимальне калібрувальне перетворення поля Янга-Міллса може бути записане у вигляді коваріантної похідної:

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}\big[\partial_\mu \omega^a - g f^a_{bc} A^b_\mu \omega^c\big] \equiv -\frac{1}{g}(D_\mu \omega)^a$$

де $\omega^a(x)$ — інфінітезимальні параметри.

4. Використовуючи вигляд оператора Фаддеева-Попова для загальної калібровки,

$$M_f^{ab}(x,y) = \int d^4 z \frac{\delta f^a(A_\mu(x))}{\delta A^c \nu(z)} D_\nu^{zcb} \delta(z-y),$$

де коваріантна похідна $D_\nu^{zcb} = \delta^{cb}\partial_\nu^z - g f^{cdb} A^d_\nu z$, порахувати оператор Фаддеева-Попова у випадку калібровок: кулонівської ($f^a(A_\mu(x)) = \partial_i A^a_i(x)$), Лоренца ($f^a(A_\mu(x)) = \partial_\mu A^{a\mu}(x)$), і аксіальної ($f^a(A_\mu(x)) = n_i A^a_i(x)$). Тут n_i є одиничний просторовий вектор, $n_i^2 = 1$.

5. Використовуючи тотожність Якобі для коваріантних похідних, довести тотожність Бьянкі для полів Янга-Міллса:

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0,$$

де коваріантна похідна діє на матричний тензор напруженості за правилом

$$D_\mu F_{\nu\lambda} = \partial_\mu F_{\nu\lambda} + ig\big[A_\mu, F_{\nu\lambda}\big].$$

6. Показати, що величина $I = \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$, де $F^{*\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$ — дуальний тензор, може бути записана у вигляді повної похідної

$$I = 4\partial_\lambda K^\lambda,$$

та знайти вигляд струму K^λ.

7. Для полів Янга-Мілса в евклідовому просторі з калібрувальною групою $SU(2)$ використовуючи параметризацію

$$A^i_a(x) = (\epsilon_{aik}\partial_k - \delta_{ai}\partial_4)\ln f(x), \quad A^0_a(x) = \partial_a \ln f(x), \quad a, i, k = 1, 2, 3,$$

привести рівняння самодуальності $F_{\mu\nu} = F^*_{\mu\nu}$ к виду

$$\frac{1}{f(x)}\Box f(x) = 0.$$

Показати, що розв'язком останнього є n - інстантонна конфігурація

$$f^{(n)}(x) = \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{\lambda_\mu^2}{(x - x_\mu)^2}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

де x_μ - положення інстантона, λ_μ - довільні розмірні параметри.

8. Довести справедливість наступного співвідношення

$$d(r)C_2(r) = T(r)d(G),$$

де $C_2(r)$ — квадратичний оператор Казиміра для представлення "r", $d(r)$ — розмірність цього представлення, $T(r)$ — нормування генераторів t^a_r у цьому представленні, $d(G)$ — розмірність групи.

9. Нехай прямий добуток двох представлень r_1 і r_2 групи G представлено прямою сумою представлень, тобто, символічно,

$$r_1 \otimes r_2 = \sum_i r_i.$$

Показати, що для квадратичних операторів Казиміра має місце співвідношення

$$\big(C_2(r_1) + C_2(r_2)\big)d(r_1)d(r_2) = \sum_i C_2(r_i)d(r_i).$$

10. Для матриць Гелл-Манна λ^a перевірити справедливість співвідношення ортогональності

$$\mathrm{tr}\,(t_3^a t_3^b) = T(3)\delta^{\alpha\beta}, \qquad t_3^a = \frac{\lambda^a}{2},$$

та обчислити константу нормування $T(3)$ у даному представленні.

11. Нехай два кварки, що належать до представлень r_1 і r_2 за кольоровою групою, утворюють зв'язаний стан у представленні r. Згідно з критерієм максимально притягувального каналу знак і сила взаємодії визначаються величиною

$$\sim \frac{1}{2}\big[C_2(r_1) + C_2(r_2) - C_2(r)\big]g^2.$$

Підрахувати силу взаємодії для каналів

$$3 \otimes \overline{3} = 1 \oplus 8 \quad \text{і} \quad 3 \otimes 3 = \overline{3} \oplus 6$$

(кварки належать до кольорового триплету 3, а антикварки — до антитриплету $\overline{3}$).

12. Обчислити причинну функцію Гріна скалярного поля в $2+1$ - вимірному просторі, тобто, порахувати інтеграл:

$$D(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(p_0 t - \mathbf{px})}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2.$$

Показати, що в безмасовому випадку функція $D(\mathbf{x},t)$ зводиться до

$$D(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2 - \mathbf{x}^2 - i\delta}}, \quad \delta \to 0.$$

Примітка. Спочатку використати представлення

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = -i\int\limits_0^\infty dt\, e^{i(p^2 - m^2 + i\epsilon)t},$$

а потім інтеграл

$$\int\limits_0^\infty dt\, t^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{t} - \gamma t} = 2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{\beta\gamma}),\ \mathrm{Re}\beta > 0, \mathrm{Re}\gamma > 0.$$

Врахувати також, що функції Макдональда напівцілого порядку зводяться до елементарних функцій, зокрема,

$$K_{-1/2}(z) = K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}.$$

13. Генеруючий функціонал для вільного скалярного поля має вигляд,

$$Z_0(J) = \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)D_c(x-y)J(y)\right].$$

Очислити четверту похідну від $Z_0(J)$, тобто,

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^4 Z_0(J),$$

і представити одержані доданки в вигляді діаграм.

14. Розглянемо наступний інтеграл,

$$I(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{ax^2}{2}-\frac{\lambda x^4}{4!}}, \quad a > 0, \lambda > 0.$$

Розкладаючи експоненту в ряд по λ, і здійснюючи інтегрування по x, одержати асимптотичний розклад $I(\lambda)$ по параметру λ.

Відповідь:

$$I(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2n+1/2)}{\Gamma(1/2)}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\lambda}{a^2 3!}\right)^n,$$

де $\Gamma(z)$ є гама-функція Ейлера. Визначити радіус збіжності цього ряду.

15. В другому порядку теорії збурень по λ порахувати "пропагатор",

$$D(a,\lambda) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\, e^{-\frac{ax^2}{2}-\frac{\lambda x^4}{4!}}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{ax^2}{2}-\frac{\lambda x^4}{4!}}}.$$

Представити одержані доданки у вигляді "діаграм Феймана".

16. Нехай "вільна енергія"визначена інтегралом

$$e^{F(J)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\phi \, e^{-S(\phi)+J\phi},$$

де

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$

Використовуючт тотожність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\phi \, \frac{d}{d\phi} e^{-S(\phi)+J\phi} = 0,$$

отримати наступне рівняння для функції $F(J)$:

$$\frac{dS}{d\phi}\left(\phi \to \frac{d}{dJ} + \frac{dF(J)}{dJ}\right) = J.$$

Диференціюючи це рівняння по J отримати ланцюжок "рівняннь Швінгера-Дайсона"для "функцій Гріна"

$$G_n = \frac{d^n F(J)}{dJ^n}\Big|_{J=0}.$$

Відповідь для трьох перших рівняннь:

$$\begin{aligned}
&G_2 + \frac{\lambda}{6} G_4 + \frac{\lambda}{2} G_2^2 = 1, \\
&G_4 + \frac{\lambda}{6} G_6 + 2\lambda G_2 G_4 + \lambda G_2^3 = 0, \\
&G_6 + \frac{\lambda}{6} G_8 + 5\lambda G_4^2 + 3\lambda G_2 G_6 + 10\lambda G_2^2 G_4 = 0.
\end{aligned}$$

17. Довести наступні рівності для інтегралів Фейнмана:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{AB} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2} = \int\limits_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}, \\
&\frac{1}{AB^n} = \int\limits_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{n y^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}}, \\
&\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \int\limits_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[xA + (1-x)B]^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.
\end{aligned}$$

18. Застосувати метод індукції і довести наступну рівність для інтеграла Фейнмана:

$$\frac{1}{A_1A_2\dots A_n} = (n-1)!\int\limits_0^1 dx_1\dots dx_n\delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)\frac{1}{[x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n]^n}.$$

19. Довести найбільш загальну рівність для інтеграла Фейнмана:

$$\frac{1}{A_1^{m_1}A_2^{m_2}\dots A_n^{m_n}} = \int\limits_0^1 dx_1\dots dx_n\delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)\frac{\prod\limits_{i=1}^n x_i^{m_i-1}}{[\sum_{i=1}^n x_iA_i]^{\sum_i m_i}}\frac{\Gamma(\sum_i m_i)}{\Gamma(m_1)\dots\Gamma(m_n)}.$$

Примітка 1. В справах (17)-(19) приймати до уваги, що всі множники A_i, B містять інфінітезімально малий додатній доданок, тобто $A_i + i\epsilon, B + i\epsilon$.

Примітка 2. Справи (18),(19) можна також довести, якщо використати тотожність

$$\frac{1}{(A+i\epsilon)^s} = \frac{(-i)^s}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty dt t^{s-1}e^{it(A+i\epsilon)}, \quad \epsilon > 0,$$

для кожного множника, потім вносячи тотожність для одиниці,

$$1 = \int\limits_0^\infty d\rho\delta\left(\sum_{i=1}^n t_i - \rho\right),$$

під інтеграл, з наступною зміною змінних $t_i \to \rho t_i$.

20. Обчислити наступний інтеграл, що зустрічається при обрахуванні поляризації вакууму в розмірній регулярізації,

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dxx(1-x)}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-n/2}},$$

використовуючи

$$\int\limits_0^1 duu^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}(u+z)^{-\rho} = z^{-\rho}B(\alpha,\beta)F(\alpha,\rho;\alpha+\beta;-1/z),$$
$$\mathrm{Re}\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\beta > 0, \quad \mathrm{Re}z > 0,$$

і співвідношення для гіпергеометричної функції Гауса,

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-b}F(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}).$$

Показати, що поляризаційний операторв в області $0 < p^2 < 4m^2$ може бути записаний як

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{e^2 2^{[n/2]}}{48\pi^2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{n/2-2}(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)\Gamma(2-n/2)F(2,2-n/2;5/2;\frac{p^2}{4m^2}),$$

де $[x]$ - ціла частина числа x.

Цей вираз допускае аналитичне продовження в області $p^2 < 0$ і $p^2 > 4m^2$. Оскільки гіпергеометрична функція $F(a,b;c;z)$ має розріз для $z > 1$, поляризаційна функція має уявну частину в області імпульсів $p^2 > 4m^2$.

21. Скінчена частина поляризації вакууму має вигляд (в схемі віднімання за Дайсоном)

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{2\pi^2}(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)\int\limits_0^1 dx x(1-x)\ln\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2}.$$

Обчислити інтеграл, використовуючи інтегрування по частинам, і одержати наступний вираз в області імпульсів $0 < p^2 < 4m^2$:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(p) = &- \frac{\alpha}{3\pi}(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)\left\{\frac{1}{3} + 2\left(1+\frac{2m^2}{p^2}\right)\left[\left(\frac{4m^2}{p^2}-1\right)^{1/2}\right.\right.\\ &\times\left.\left.\ \mathrm{arcctg}\left(\frac{4m^2}{p^2}-1\right)^{1/2} - 1\right]\right\}.\end{aligned}$$

22. В попередній справі зробити аналітичне продовження до області імпульсів $p^2 > 4m^2$ за допомогою формули

$$\mathrm{arcctg}(iz) = -i\mathrm{arccth}(z) = \frac{1}{2i}\ln\frac{z+1}{z-1},$$

і порахувати уявну частину $\mathrm{Im}\Pi(p^2 + i\epsilon)$, де скалярна функція $\Pi(p^2)$ визначається як

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \left(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu\right)\Pi(p^2).$$

23. Використовуючи вираз для поляризації вакууму із завдання 20, одержати її вираз в розмірності часу-простору $1+2$ $(n=3)$ для звідного 4×4 представлення γ матриць:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \left(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu\right)\Pi(p^2),$$

де

$$\Pi(p^2) = \frac{e^2 m}{2\pi p^2}\left[-1 + \left(1+\frac{p^2}{4m^2}\right)\sqrt{-\frac{4m^2}{p^2}}\mathrm{arctg}\sqrt{-\frac{p^2}{4m^2}}\right], \quad p^2 < 0.$$

[Зауваження: для звідного 4×4 представлення γ матриц необхідно фактор $2^{[3/2]}$ із задачи 20 замінити на 4.]

Зробити аналітичне продовження до значень $p^2 > 4m^2$.

24. Порахувати власну енергію електрона в другому порядку теорії збурень в довільній калібровці $\xi \neq 1$, застосувавши розмірну регуляризацію. Показати, що значення фізичної маси, яке визначається положенням полюса пропагатора, не залежить від калібрувального параметра ξ.

IV. Електрослабкі взаємодії.

1. Загальний вигляд взаємодії ферміонів зі скалярними полями (взаємодія Юкави) має вид:

$$\bar{\psi}_l \Gamma_i^{lm} \Phi^i \psi_m.$$

З умови інваріантності $\delta(\bar{\psi}_l \Gamma_i^{lm} \Phi_i \psi_m) = 0$ відносно інфінітезімальних калібрувальних перетворень,

$$\delta\psi_l = -t^a_{lm}\psi_m \delta\omega^a(x),$$
$$\delta\Phi_i = -T^a_{ij}\Phi_j \delta\omega^a(x),$$

отримати умови на набір юкавівських констант зв'язку Γ_i^{lm}.

2. Розглянути калібрувальну теорію з групою $SU(3)$, яка містить скалярне поле у приєднаному представленні. Кінетичний доданок має в цьому випадку вигляд:

$$\mathrm{tr}[(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi],$$

де $D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ig[A_\mu, \Phi]$ - дія коваріантної похідної на поле у приєднаному представленні, $\Phi = \Phi^a T^a$, T^a - генератори групи. Нехай поле Φ набуває вакуумне середне

$$\langle \Phi \rangle = \Phi_0 = |\phi| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

яке порушує початкову симетрію $SU(3)$ до симетрії $SU(2) \times U(1)$. Визначити які з калібрувальних бозонів A^a_μ набувають масу і порахувати їх.

3. Те саме завдання для випадку вакуумного середнього

$$\langle\Phi\rangle = \Phi_0 = |\phi| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку визначити також залишкову симетрію.

4. Розглянути калібрувальну теорію з групою $SU(3)$, яка містить скалярне поле у фундаментальному представленні з вакуумним середнім

$$\langle\Phi\rangle = \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Знайти спектр мас калібрувальних бозонів і залишкову симетрію.