

**Перелік питань до екзамену з функціонального аналізу
для магістрів кафедри математики КАУ 24 червня 2020 р.**

Лінійні топологічні, нормовані та банахові простори. Теорема про поповнення нормованого простору. Передгільбертові та гільбертові простори. Нерівність Коші-Буняковського. Норма та поповнення передгільбертового простору.

Приклади банахових та гільбертових просторів.

Нерівності Гельдера та Мінковського. Простори L_p та l_p , їх властивості.

Теорема про майже ортогональний вектор.

Лінійні неперервні функціонали, та їх властивості, норма лінійного функціонала. Неперервність лінійних функціоналів у скінченновимірному просторі.

Спряжений простір до нормованого простору. Повнота спряженого простору.

Продовження лінійного функціонала за неперервністю.

Теорема Гана-Банаха. Наслідки з теореми Гана-Банаха.

Базис Шаудера, приклад простору l_p .

Простори, спряжені до l_p . Випадки $p=1$, скінченного та нескінченного p .

Простори, спряжені до L_p . Випадки $p=1$, скінченного та нескінченного p .

Простір, спряжений до простору неперервних функцій. Теорема Ріса.

Вкладення простору у другий спряжений. Рефлексивність банахових просторів.

Теорема Банаха-Штейнгауза.

Слабка збіжність лінійних функціоналів. Слабка повнота спряженого простору.

Слабка передкомпактність кулі у спряженому просторі.

Слабка збіжність у нормованому просторі. Критерій слабкої збіжності.

Проекція вектора на підпростір гільбертового простору. Теорема про існування проекції на підпростір.

Ортогональне доповнення до підпростору гільбертового простору. Пряма сума підпросторів гільбертового простору.

Загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на гільбертовому просторі. Теорема Ріса.

Ортонормовані системи та ортонормовані базиси в гільбертовому просторі. Нерівність Бесселя та рівність Парсеваля.

Ортогоналізація системи векторів гільбертового простору. Ортогональні поліноми.

Ізоморфізм сепарабельних гільбертових просторів.

Лінійний оператор у лінійному просторі. Приклади лінійних операторів: оператори у скінченновимірних просторах, оператори множення, інтегральні оператори.

Норма оператора. Приклади.

Простір лінійних неперервних операторів, його повнота.

Рівномірна, сильна та слабка збіжність операторів. Порівняння.

Теорема Банаха-Штейнгауза для простору операторів.

Алгебраїчні операції над операторами.

Обернений оператор, критерій існування оберненого оператора.

Розклад оберненого оператора у суму геометричної прогресії. Достатня умова оборотності суми операторів.

Неперервність біективного оператора.

Спряжений оператор. Приклади. Спряжений оператор у гільбертовому просторі.

Властивості спряжених операторів.

Білінійні та квадратичні форми у гільбертовому просторі. Представлення білінійної форми через оператор.

Самоспряжені оператори у гільбертовому просторі. Невід'ємні оператори.

Проектори у гільбертовому просторі, їх властивості.

Нормальні, ізометричні та унітарні оператори. Приклад неунітарної ізометрії.

Матричне представлення операторів у гільбертовому просторі. Матриця самоспряженого, невід'ємного оператора, проектора та ізометрії.

Норма Гільберта-Шмідта оператора. Оператори Гільберта-Шмідта та їх властивості.

Інтегральні оператори Гільберта-Шмідта.

Регулярні точки та спектр лінійного оператора. Замкненість спектру оператора.

Резольвента лінійного оператора. Тотожність Гільберта. Аналітичність резольвенти.

Теорема про непорожність спектру обмеженого оператора.

Компактні оператори. Властивості та приклади.

Замкненість множини компактних операторів.

Компактність оператора, спряженого до компактного.

Компактність операторів Гільберта-Шмідта.

Рівняння, пов'язані з компактними операторами. Нормальна розв'язність. Перша та друга теореми Фредгольма.

Критерій однозначної розв'язності рівнянь з компактным оператором.

Теорема про рівність розмірності простору розв'язків початкового та спряженого однорідних рівнянь з компактними операторами.

Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, теореми про властивості їх розв'язків.

Властивості спектру компактного оператора.

Спектральний радіус оператора. Розв'язання рівнянь методом послідовних наближень.

Теорема про існування власного вектора у компактного самоспряженого оператора. Властивості власних значень та власних векторів самоспряженого оператора.

Спектральна теорема для компактного самоспряженого оператора.

Сильно вимірні функції. Інтеграл Бохнера.

Критерій інтегровності за Бохнером сильно вимірної функції.

Властивості інтеграла Бохнера від операторнозначних функцій.

Аналітичні функції від обмеженого оператора.

Теорема Данфорда про відображення спектрів.

Суперпозиція аналітичних функцій від обмеженого оператора.