

1. Класифікація ренормованості теорій

У найнижчому порядку теорії збурень (однопетльові діаграми) ми виділили розбіжні частини в розмірній регуляризації. Вони мають вигляд: для власної енергії електрона

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}(-\hat{p} + 4m) + \text{скінчена частина},$$

поляризаційного оператора

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + \text{скінчена частина},$$

і поправки до вершини

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, q, p+q) = \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}\gamma_\mu + \text{скінчена частина}.$$

Визначимо ступень розбіжності (збіжності) діаграми загального вигляду з числом F_i внутрішніх фотонних ліній і числом E_i внутрішніх електронних ліній. Індекс діаграми D підраховує ступінь її розбіжності, тобто, різницю між числом інтегрувань по внутрішнім (петльовим) імпульсам і їх числом в знаменнику від пропагаторів, і дорівнює

$$D = nL - 2F_i - E_i,$$

де L — число петель, n — розмірність простору-часу. Нехай крім того, V — число вершин, F_e — число зовнішніх фотонних ліній, E_e — число зовнішніх електронних ліній.

Ясно, що L (число незалежних інтегрувань) дорівнює числу внутрішніх ліній мінус число вершин V (δ -функції в кожній вершині) $+1$ (виділяється одна δ -функція відповідна за збереження повного імпульсу):

$$L = E_i + F_i - V + 1.$$

Число вершин V пов'язано з числом електронних і фотонних ліній. У квантової електродинаміці є тільки одна вершина, яка описує взаємодію електронів і фотонів, і в ній сходяться дві електронні лінії, тому число електронних кінців дорівнює подвоєному числу вершин. Але у внутрішній ферміоній лінії два кінця, а у зовнішній один, тому маємо співвідношення між числом електронних кінців і числом вершин

$$2E_i + E_e = 2V.$$

Аналогічно, маємо співвідношення між числом фотонних кінців і числом вершин

$$2F_i + F_e = V.$$

З цих рівнянь

$$E_i = V - \frac{1}{2}E_e, \quad F_i = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}F_e, \quad (1.1)$$

знаходимо вираз для D :

$$D = n + V \frac{n-4}{2} - \frac{n-1}{2}E_e - \frac{n-2}{2}F_e.$$

Зауважимо, що в остаточній формулі індекс розбіжності залежить тільки від числа зовнішніх ліній і кількості вершин в діаграмі і не залежить від числа внутрішніх ліній. Тобто, ми можемо провести класифікацію розбіжних діаграм, для яких $D \geq 0$, відповідно до кількості зовнішніх електронних і фотонних ліній, що визначає тип діаграми.

Для чотиривимірного простору-часу, $n = 4$,

$$D = 4 - \frac{3}{2}E_e - F_e,$$

пропадає залежність від числа вершин V ! Такі теорії, у яких індекс D не залежить від числа вершин відносяться до перенормованих теорій. У них є тільки скінчене число типів розбіжних діаграм, для яких $D \geq 0$. У КЕД це буде сім типів діаграм, які легко перерахувати.

1) $E_e = F_e = 0$ — вакуумні діаграми (розбігаються як четверта ступінь імпульсу), $D = 4$.

2) $E_e = 2, F_e = 0, D = 1$ — діаграма власної енергії електрона.

3) $E_e = 2, F_e = 1, D = 0$ — вершинна діаграма.

4) $E_e = 0, F_e = 1, D = 3$ — діаграма з одним зовнішнім фотоном.

5) $E_e = 0, F_e = 2, D = 2$ — діаграма власної енергії фотона.

6) $E_e = 0, F_e = 4, D = 0$ — діаграма розсіювання фотона на фотоні.

7) $E_e = 0, F_e = 3, D = 1$ — діаграма з трьома зовнішніми фотонами.

Всі ці діаграми зображені на малюнках Рис.1, Рис.2, і Рис.3.

Оскільки кінетичний член в лагранжіані Дірака інваріантний щодо перетворення зарядового спряження

$$\psi \rightarrow \psi^C = C\bar{\psi}^T,$$

де матриця C задана формулою $C = i\gamma^0\gamma^2$ і задовольняє співвідношенням

$$C^2 = -1, \quad C^{-1} = -C, \quad C^\dagger = -C,$$

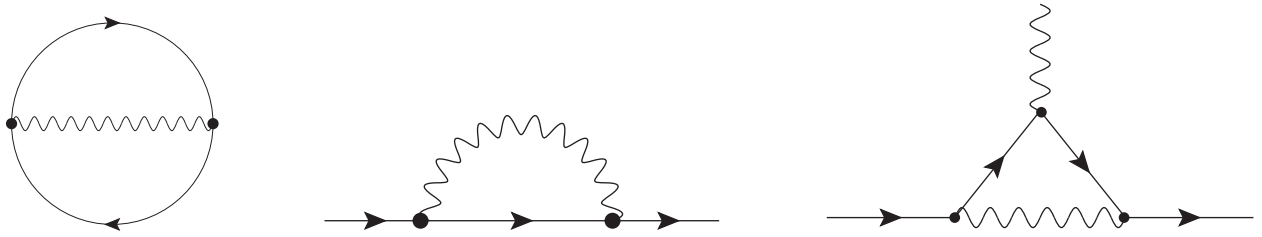


Рис. 1: Розбіжні діаграми в найнижчому порядку теорії збурень: вакуумна; власна енергія електрона; поправка до вершини взаємодії.

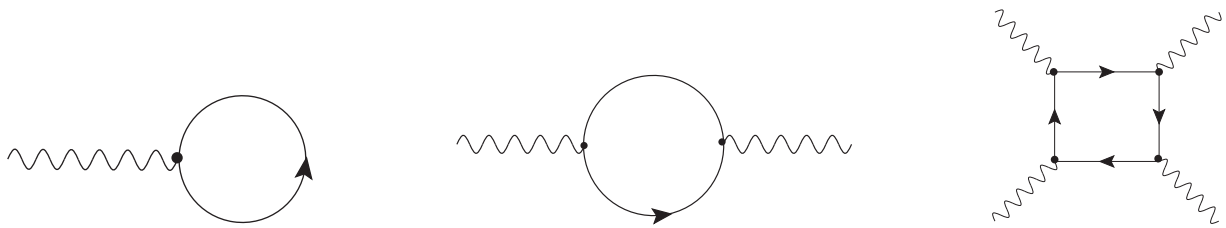


Рис. 2: Розбіжні діаграми в найнижчому порядку теорії збурень: з одним зовнішнім фотоном ("пуголовок"); власна енергія фотона; розсіювання світла на світлі.

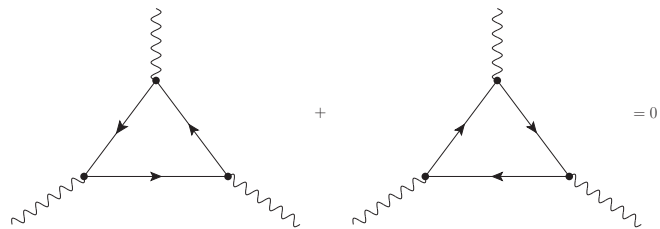


Рис. 3: Розбіжні діаграми в найнижчому порядку теорії збурень: дві діаграми з трьома фотонними лініями з ферміонними циклами за годинниковою і проти годинникової стрілки. Сума цих діаграм дорівнює нулю в силу теореми Фарі.

$$C^T = -C, \quad C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu,$$

а струм $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ при цьому мінє знак, то лагранжіан КЕД інваріантний відносно перетворень

$$\psi \rightarrow \psi^C = C\bar{\psi}^T, \quad A_\mu \rightarrow -A_\mu.$$

Тому лагранжіан КЕД не може породжувати взаємодії з непарним числом фотонних кінців і без зовнішніх ферміонних ліній. Це твердження є так званою теоремою Фаррі. Один із доказів заснован на представленні функцій Гріна полів через функціональний інтеграл, в даному випадку

$$\langle 0|TA_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_{2k+1}}(x_{2k+1})|0\rangle = N\int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_{2k+1}}(x_{2k+1})e^{i\int d^4x\mathcal{L}(A,\bar{\psi},\psi)}.$$

При заміні змінних в інтегралі, що відповідає перетворенню полів щодо зарядової симетрії, міра інтегрування і лагранжева густина не змінюють знак, а весь інтеграл змінює знак із-за непарного числа фотонних полів, тобто, маємо

$$\langle 0|TA_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_{2k+1}}(x_{2k+1})|0\rangle = -\langle 0|TA_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)\dots A_{\mu_{2k+1}}(x_{2k+1})|0\rangle = 0.$$

Насправді, окрема діаграма з непарним числом фотонних кінців, яка дає внесок в даний коррелятор, не дорівнює нулю, але відбувається скорочення діаграм з різною орієнтацією внутрішніх замкнутих ферміонних петель.

Відзначимо, що наявність додаткових симетрій лагранжиана часто призводить до зниження ступеня розбіжності діаграми. Зокрема, калібрувальна інваріантність знижує індекс розбіжності, так що розбіжність діаграми 4 знижується з квадратичної до логарифмічної, а діаграма 6 виявляється збіжною. Дійсно, для діаграми 4 калібрувальна інваріантність вимагає, щоб функція поляризації вакууму мала тензорну структуру $\Pi_{\mu\nu}(k) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\Pi(k^2)$. Це означає що дві ступені імпульсу ферміонної петлі замінюються зовнішніми імпульсами, і отже, справжня ступінь розбіжності $D - 2 = 0$, що відповідає логарифмічній розбіжності. Аналогічні міркування приводять до збіжності діаграми 6.

Ступінь розбіжності діаграми 2 також знижується з лінійної до логарифмічної. Діаграма з одним фотоном на Рис.2 виявляється рівною нулеві за рахунок лоренцевої симетрії. Щоб побачити це, зауважимо, що амплітуда має індекс Лоренца, але немає зовнішнього 4-вектора з якого можна побудувати вираз. Але якщо лоренцева симетрія порушена, наприклад через присутність зовнішніх полів, то вона не дорівнює нулю. Це стосується і інших діаграм з непарним числом фотонів і без ферміонних кінців. Наприклад, теорема Фарі не працює у випадку порушення зарядової симетрії, яка порушується за наявності зовнішніх зарядів або зовнішнього магнітного поля.

У реальності в КЕД, крім вакуумних діаграм, є всього три типи розбіжних діаграм: діаграми власної енергії електрона і фотона, і вершинна діаграма з двома електронними та однією фотонною лініями. Всі вони розбігаються

тільки логарифмічно. Підкреслимо, що скінченним є тільки число типів розбіжних діаграм, самих діаграм даного типу нескінченна кількість, тому що є безліч діаграм з довільним числом внутрішніх вершин.

Відзначимо також, що індекс D вказує тільки на розбіжність діаграми в цілому, не зважаючи на наявність розбіжних піддіаграм. Розбіжності останніх не враховуються цим індексом, і повинні бути видалені до обрахунку діаграми як цілого. Процес видалення розбіжностей і буде складати суть теорії перенормування.

Квантова електродинаміка в розмірності $n = 3$ (КЕДЗ) використовується для опису динаміки низькоенергетичних збуджень в планарних системах фізики конденсованих середовищ (графен, високотемпературна надпровідність). Для цієї моделі

$$D = 3 - E_e - \frac{1}{2}F_e - \frac{1}{2}V, \quad (1.2)$$

і КЕДЗ виявляється суперперенормованою. Ультрафіолетово розбіжними є (крім вакуумної діаграми) тільки дві діаграми в порядку e^2 : діаграма власної енергії електрона ($E_e = 2, F_e = 0, V = 2$) - розбіжність логарифмічна ($D = 0$), і діаграма власної енергії фотона ($E_e = 0, F_e = 2, V = 2$) - розбігається лінійно ($D = 1$).

Калібрувальна інваріантність КЕДЗ знижує розбіжність останньої діаграми до $D = -1$, тобто, діаграма виявляється збіжною. Розбіжність діаграми власної енергії електрона також знижується до $D = -1$. Таким чином, КЕДЗ виявляється скінченою теорією, тобто, ультрафіолетові розбіжності в ній відсутні.

1.1 Індекс діаграми і ступінь розбіжності в теорії $\lambda\Phi^r$

Для індексу діаграми в теорії скалярного поля з взаємодією $\lambda\Phi^r$ маємо

$$D = nL - 2I, \quad (1.3)$$

де I - число пропагаторів (внутрішніх ліній), які при великих імпульсах зменшуються як $\sim 1/p^2$. Число петель (незалежних інтегрувань) визначається виразом $L = I - V + 1$. При підрахунку індексу діаграми в даній теорії врахуємо, що в вершині сходяться (або виходять) r ліній, тому маємо співвідношення

$$rV = 2I + E, \quad (1.4)$$

де E - число зовнішніх ліній, що входять до вершини. Звідси $I = \frac{r}{2}V - \frac{1}{2}E$, і для індексу знаходимо

$$D = n - nV + (n - 2)I = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right)E + V \left[\frac{r}{2}(n - 2) - n\right]. \quad (1.5)$$

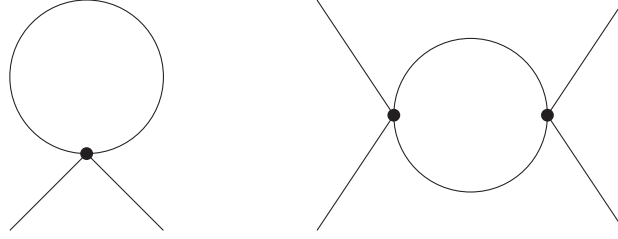


Рис. 4: Розбіжні діаграми в найнижчому порядку теорії збурень в теорії $\lambda\Phi^4$: власна енергія скалярної частинки і поправка до вершини взаємодії.

В розмірності простору-часу $n = 4$

$$D = 4 - E + V(r - 4). \quad (1.6)$$

Як видно, індекс залежить від числа вершин в діаграмі, якщо ступінь самодії $r \neq 4$, і не залежить, якщо $r = 4$. Таким чином, теорія скалярного поля із взаємодією $\lambda\Phi^4$ виявляється перенормованою в розмірності $n = 4$ оскільки в ній є *скінченне* число типів розбіжних діаграм з $D \geq 0$ і числом зовнішніх ліній $E \leq 4$, хоча самих діаграм даного типу (з фіксованим E) нескінченна кількість (з довільним числом вершин V).

Очевидно, що теорії з $r > 4$ є неперенормованими в розмірності $n = 4$, тому що містять *нескінченне* число типів розбіжних діаграм: для будь-якої діаграми з фіксованим числом зовнішніх ліній E , збільшуючи кількість вершин в ній, приходимо до розбіжної діаграми.

Нарешті, теорія $\lambda\Phi^3$, для якої $D = 4 - E - V$ відноситься до суперперенормованих теорій. В таких теоріях є всього лише скінченне число розбіжних діаграм (з скінченим числом зовнішніх ліній і вершин).

Перерахуємо всі примітивно розбіжні діаграми в теорії $\lambda\Phi^4$ ($n = 4$). Вакуумна діаграма має розбіжність $D = 4$. Далі,

$$\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}, \quad D = 2, \quad (1.7)$$

- діаграма власної енергії скалярної частинки в найнижчому порядку теорії збурень.

$$\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)((k + p_1 + p_2)^2 - m^2)}, \quad D = 0, \quad (1.8)$$

- діаграма вершинної функції в найнижчому порядку теорії збурень. Ці діаграми зображені на Рис.4.

Для теорії $\lambda\Phi^4$ ($r = 4$) в довільній розмірності індекс (1.5) набуває вигляду

$$D = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) E + V(n - 4). \quad (1.9)$$

Таким чином, теорія скалярного поля із взаємодією $\lambda\Phi^4$ неперенормована в розмірностях $n > 4$, перенормована при $n = 4$, і суперперенормована при $n < 4$.

Для теорії $\lambda\Phi^3$ ($r = 3$)

$$D = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) E + V \left(\frac{n}{2} - 3\right). \quad (1.10)$$

Теорія неперенормована в розмірностях $n > 6$, перенормована при $n = 6$, і суперперенормована при $n < 6$.

1.2 Розмірний аналіз

Критерій перенормованості можна спростити, звівши його до визначення розмірності констант взаємодії. В системі одиниць, в якій постійна Планка і швидкість світла дорівнюють одиниці, $\hbar = 1 = c$, розмірності маси і довжини взаємно протилежні, $\text{грам} = \text{см}^{-1}$, і розмірності полів, констант взаємодії та інших фізичних величин виражаються в ступенях маси. Проведемо такий розмірний аналіз на прикладі скалярного поля з дією

$$S = \int d^n x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{g}{r!} \Phi^r. \quad (1.11)$$

Оскільки дія в обраній системі одиниць безрозмірна, розмірність густини лагранжіана $[\mathcal{L}] = (\text{довжина})^{-n} = M^n$, і з кінтичного доданку знаходимо розмірність поля

$$\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \Rightarrow [\Phi] = M^{\frac{n-2}{2}}. \quad (1.12)$$

Для визначення розмірності константи взаємодії вважаємо, що розмірність $[g] = M^\delta$, і з умови $[g\Phi^r] = M^n$ знаходимо

$$\delta = n + r - \frac{rn}{2}. \quad (1.13)$$

Наприклад, розмірності констант для наступних теорій будуть:

$$\lambda\Phi^4 : \quad \delta = 4 - n,$$

$$g\Phi^3 : \quad \delta = 3 - \frac{n}{2},$$

$$g\Phi^6 : \quad \delta = 6 - 2n.$$

визначаючи $r = \frac{n-\delta}{\frac{n}{2}-1}$, знаходимо, що індекс (1.5) перепишеться у вигляді

$$D = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) E - V\delta. \quad (1.14)$$

Таким чином, для перенормованості теорії необхідно $\delta \geq 0$, тобто, константи взаємодії повинні бути або безрозмірними, або мати розмірність маси в позитивній ступені. Якщо є константи взаємодії розмірності маса в негативній ступені, то теорія неперенормована.

Наприклад, в теорії Фермі взаємодія має вигляд

$$G\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi. \quad (1.15)$$

Для чотиривимірного простору розмірність ферміонного поля $[\psi] = M^{3/2}$, і $\delta = -2$. Отже, теорія Фермі є неперенормованою.

Розглянемо розмірності функцій Гріна

$$G^{(l)}(x_1, \dots, x_l) \equiv \langle 0|T\Phi(x_1)\dots\Phi(x_l)|0\rangle. \quad (1.16)$$

Очевидно, що розмірність

$$[G^{(l)}(x_1, \dots, x_l)] = l\left(\frac{n}{2} - 1\right). \quad (1.17)$$

Для Фур'є-образу

$$[G^{(l)}(p_1, \dots, p_l)] = l\left(\frac{n}{2} - 1\right) - ln = -l\left(\frac{n}{2} + 1\right), \quad (1.18)$$

і виділяючи дельта-функцію збереження повного чотириімпульсу,

$$G^{(l)}(p_1, \dots, p_l) = \bar{G}^{(l)}(p_1, \dots, p_{l-1})\delta(P), \quad P = \sum_i p_i.$$

Розмірність дельта-функції $[\delta(P)] = M^{-n}$. Тому, розмірність функції Гріна в імпульсному просторі дорівнює

$$[\bar{G}^{(l)}(p_1, \dots, p_{l-1})] = n - l\left(\frac{n}{2} + 1\right). \quad (1.19)$$

Зокрема, для двоточкової функції Гріна ($l = 2$) в розмірності $n = 4$:

$$[\bar{G}^{(2)}] = -2.$$

Дійсно, вільний пропагатор в імпульсному представленні,

$$\bar{G} = \frac{i}{p^2 - m^2},$$

має розмірність $[\text{масса}]^{-2}$.

Завдання.

1. Довести комбінаторну тотожність

$$L = I - V + 1, \quad (1.20)$$

що пов'язує кількість петель L будь-якого графіка Фейнмана з кількістю внутрішніх ліній I і кількістю вершин V .

2. Визначити розмірність констант взаємодії наступних теорій:

$$\mathcal{L}_{int} =: g\bar{\psi}\psi\Phi, \quad g(\bar{\psi}\psi)^2, \quad g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\Phi. \quad (1.21)$$