Нехай $A = R\text{-mod}$, R – довільне кільце. DGA 6

Як переконатись, що еквівалентності

$N : sA \leftrightarrows Ch_{\geq 0}(A) : K$ зберігають гомотопії?

Зокрема, N відображає гомотопні морфізми симпліціальних модулів $f, g : X \to Y \in sA$ в гомотопні ланцюгові відображення $Nf \sim Ng : NX \to NY$?

<u>Симпліціальна гомотопія</u> – це

$h : X \otimes \Delta^1 \to Y \in sA$ з умовою

$$\left(X \overset{\rho^{-1}}{\cong} X \otimes \Delta^0 \xrightarrow{1 \otimes \Delta^{\partial^1}} X \otimes \Delta^1 \xrightarrow{h} Y\right) = f,$$

$$\left(X \overset{\rho^{-1}}{\cong} X \otimes \Delta^0 \xrightarrow{1 \otimes \Delta^{\partial^0}} X \otimes \Delta^1 \xrightarrow{h} Y\right) = g.$$

Тут $\Delta^n = \mathbb{Z}\Delta(-, [n]) \in sfAb$, $\otimes$ означає праву дію $\otimes : sA \times sfAb \to sA$

$f : [m] \to [n] \in \Delta^{op}$

$$(X_n, X(f))_{n,f} \times (P_n, P(f))_{n,f} \mapsto (X_n \otimes P_n, X(f) \otimes P(f))_{n,f}$$

де $\quad (g, k) \mapsto g \otimes k$

права дія $(\otimes : A \times fAb \to A) =$

$$= (A \times fAb \xrightarrow{c} fAb \times A \xrightarrow{\otimes} A)$$

збігається з введеною раніше лівою дією, c – функтор перестановки. Дія включає не лише $\otimes$, а й ізоморфізм $(X \otimes P) \otimes Q \cong X \otimes (P \otimes Q)$, який надалі ігнорується, і ізоморфізм $\rho : X \otimes \Delta^0 \to X$, який зумовлений тим, що Δ^0 – одиничний об'єкт симетричної моноїдальної категорії $sfAb$.

DGA 7

$\Delta^0_n = \mathbb{Z}$, $\forall n \geq 0$.

$N\Delta^0 = 0 \to \underset{0}{\mathbb{Z}} \to 0 =: \mathbb{Z}$ — також одиничний об'єкт симетричної моноїдальної категорії $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A}b)$,

$N\Delta^1 = 0 \to \underset{1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(1,-1)} \underset{0}{\mathbb{Z}^2} \to 0 =: I$ — інтервал.

Вкладення $\Delta^{\partial^1}, \Delta^{\partial^0} : \Delta^0 \to \Delta^1$ індукують вкладення $i_0 = N\Delta^{\partial^1}$, $i_1 = N\Delta^{\partial^0} : N\Delta^0 \to N\Delta^1$, які зводяться до вкладення $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^2$, $1 \mapsto (1,0)$ або $(0,1)$.

<u>Ланцюгова гомотопія</u> між Nf і Ng — це ланцюгове відображення $h' : NX \otimes N\Delta^1 \to NY$ таке, що

$(NX \overset{\rho^{-1}}{\cong} NX \otimes N\Delta^0 \xrightarrow{1\otimes i_0} NX \otimes N\Delta^1 \xrightarrow{h'} NY) = Nf$,

$(NX \overset{\rho^{-1}}{\cong} NX \otimes N\Delta^0 \xrightarrow{1\otimes i_1} NX \otimes N\Delta^1 \xrightarrow{h'} NY) = Ng$.

Функтор N піднімається до функтора комплекса Мура $C : sA \to Ch_{\geq 0}(A)$, **DGA8**

$$X \mapsto \left((X_n)_{n\geq 0}, \left(d = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} d_j : X_k \to X_{k-1} \right)_{k \geq 1} \right)$$

(вибір знаку пов'язаний з використанням правих операторів), див. (1.10)). N отримується з C за формулою

$$N(X) = \left(\left(\operatorname{im}\left(\pi_{k-1} : C(X)_k \to C(X)_k \right) \right)_{k\geq 0}, \left(d^N = \pi_{k-1} \cdot d^C \cdot \pi_{k-2} : N(X)_k \to N(X)_{k-1} \right)_{k\geq 1} \right)$$

Функтор C відображає гомотопні симпліціальні морфізми $f \sim g : X \to Y$ в гомотопні ланцюгові відображення $Cf \sim Cg : CX \to CY$.

Для переходу від семпліціальної гомотопії до ланцюгової гомотопії скористаємось ланцюговим відображенням Ейленберга–Зільберга, або * відображенням перетасовок: для $a \in X_p$, $b \in Y_q$

$sh : CX \otimes CY \to C(X \otimes Y)$, $X \in s.A$, $Y \in s.Ab$,

$$sh(a \otimes b) = \sum_{(\mu,\nu)-(p,q)\text{-перетасовка}} (-1)^{\sigma(\mu,\nu)} \left(s_{\nu_q} \cdots s_{\nu_1} a \otimes s_{\mu_p} \cdots s_{\mu_1} b\right)$$

(μ,ν) = розбиття $[p+q-1]$ на 2 підмножини: $\mu = \{\mu_1 < \dots < \mu_p\}$ і $\nu = \{\nu_1 < \dots < \nu_q\}$.

Знак визначається сігнатурою підстановки $\begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & p+q \\ \mu_1+1 & \dots & \mu_p+1 & \nu_1+1 & \dots & \nu_q+1 \end{pmatrix}$, а саме числом

$$\sigma(\mu,\nu) = \sum_{i=1}^{p} [\mu_i - (i-1)].$$

<u>Вправа</u> sh – ланцюгове.

$$C(\Delta^0) = \quad \xrightarrow{0} \underset{4}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{1} \underset{3}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{1} \underset{1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

Введемо ланцюгове відображення $sh_0 : \mathbb{Z} \to C(\Delta^0)$

$$sh_0 \quad \begin{tikzcd} \to 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\ \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

маємо

$$\begin{tikzcd} C(X)\otimes\mathbb{Z} \arrow[r, "\rho", "\cong"'] \arrow[d, "1\otimes sh_0"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C(X) \\ C(X)\otimes C(\Delta^0) \arrow[r, "sh"] & C(X\otimes\Delta^0) \arrow[u, "C(\rho)"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

Дія $\otimes: A \times fAb \to A$ розповсюджується на комплекси як $\otimes : Ch_{\geq 0}(A) \times Ch_{\geq 0}(fAb) \to Ch_{\geq 0}(A)$ $\boxed{DGA\ 10}$

$$(A, B) \longmapsto A \otimes B$$

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{k+l=n} A_k \otimes B_l, \quad d^{A\otimes B} = d^A \otimes 1 + 1 \otimes d^B,$$

(праві оператори, знак приховано).

Функтор $(C, sh, sh_0) : sA \to Ch_{\geq 0}(A)$ узгоджений з діями в розслабленому сенсі (lax):

sh — це

$$\begin{tikzcd}
sA \times sfAb \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "C\times C"'] & sA \arrow[d, "C"] \\
Ch_{\geq 0}(A) \times Ch_{\geq 0}(fAb) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[ur, Rightarrow, "sh"] & Ch_{\geq 0}(A)
\end{tikzcd}$$

, sh_0 — вище

Виконується умова (9) і

<u>Вправа — задача</u>:

$$\begin{tikzcd}
C(X) \otimes C(P) \otimes C(Q) \arrow[r, "1\otimes sh"] \arrow[d, "sh\otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C(X) \otimes C(P\otimes Q) \arrow[d, "sh"] \\
C(X\otimes P) \otimes C(Q) \arrow[r, "sh"] & C(X\otimes P\otimes Q)
\end{tikzcd}$$

Оберемо вкладення $i^1 : N\Delta^1 \to C\Delta^1$,

напр. таке

$$\begin{tikzcd}
N\Delta^1 \arrow[d, "i^1"'] & \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "(1\ -1)"] \arrow[d, "(0,1,0)"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
C\Delta^1 & \arrow[r] & \mathbb{Z}^4 \arrow[r] & \mathbb{Z}^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

або [illegible] i^1 таке:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "(1\ -1)"] \arrow[d, "(0,1,-1)"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\arrow[r] & \mathbb{Z}^4 \arrow[r] & \mathbb{Z}^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Тоді комутативні квадрати

DGA 11

$$\begin{tikzcd} N\Delta^0 \arrow[r, "N\Delta^{\partial^1}"] \arrow[d, "sh_0"'] \arrow[dr, phantom, "="] & N\Delta^1 \arrow[d, "i^1"] \\ C\Delta^0 \arrow[r, "C\Delta^{\partial^1}"] & C\Delta^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N\Delta^0 \arrow[r, "N\Delta^{\partial^0}"] \arrow[d, "sh_0"'] \arrow[dr, phantom, "="] & N\Delta^1 \arrow[d, "i^1"] \\ C\Delta^0 \arrow[r, "C\Delta^{\partial^0}"] & C\Delta^1 \end{tikzcd}$$

Нехай $f \sim g : X \to Y$ завдяки $h : X \otimes \Delta^1 \to Y$ розглянемо

$$h' = \left(CX \otimes N\Delta^1 \xrightarrow{1 \otimes i^1} CX \otimes C\Delta^1 \xrightarrow{sh} C(X \otimes \Delta^1) \xrightarrow{Ch} CY\right).$$

Це гомотопія $Cf \sim Cg : CX \to CY$ оскільки

$$\begin{tikzcd} CX \arrow[r, "\rho^{-1}"] \arrow[ddrr, "C\rho^{-1}"'] & CX \otimes N\Delta^0 \arrow[r, "1 \otimes N\Delta^{\partial^1}"] \arrow[dr, "1 \otimes sh_0"'] & CX \otimes N\Delta^1 \arrow[r, "1 \otimes i^1"] & CX \otimes C\Delta^1 \arrow[r, "sh"] & C(X \otimes \Delta^1) \arrow[r, "Ch"] & CY \\ & & CX \otimes C\Delta^0 \arrow[ur, "1 \otimes C\Delta^{\partial^1}"'] \arrow[d, "sh"] & & & \\ & & C(X \otimes \Delta^0) \arrow[uurr, "C(1 \otimes \Delta^{\partial^1})"'] & & & \end{tikzcd} = Cf$$

Аналогічно

$$\left(CX \xrightarrow{\rho^{-1}} CX \otimes N\Delta^0 \xrightarrow{1 \otimes N\Delta^{\partial^0}} CX \otimes N\Delta^1 \xrightarrow{1 \otimes i^1} CX \otimes C\Delta^1 \xrightarrow{sh} C(X \otimes \Delta^1) \xrightarrow{Ch} CY\right) = Cg.$$

Для $A = R\text{-mod}$, R - комутативне кільце, доведемо, що існує структура розслабленого (lax) функтора $(\overline{sh}, \overline{sh}_0)$ на N та морфізм розслаблених функторів $\pi : CX \to NX$, тобто

$$\begin{tikzcd} & C\Delta^0 \arrow[d, "\pi_P"] \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "sh_0"] \arrow[dr, "\overline{sh}_0"'] \arrow[r, phantom, "="] & N\Delta^0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CX \otimes C(P) \arrow[r, "sh"] \arrow[d, "\pi \otimes \pi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C(X \otimes P) \arrow[d, "\pi_P"] \\ N(X) \otimes N(P) \arrow[r, "\overline{sh}"] & N(X \otimes P) \end{tikzcd}$$