

Нехай  $A = R\text{-mod}$ ,  $R$  - довільне кільце. (DGA 6)

Як переконаєтесь, що євклідовості

$N: sA \rightleftharpoons \text{Ch}_{\geq 0}(A) : K$  зберігають гомотопії?

Зокрема,  $N$  відображає гомотопічні морфізми симпліціальних модулів  $f, g: X \rightarrow Y \in sA$  в гомотопічні канічурові відображення  $Nf \sim Ng: NX \rightarrow NY$ ?

Симпліціальна гомотопія - це

$h: X \otimes \Delta^2 \rightarrow Y \in sA$  з умовою

$$(X \xrightarrow{\rho^1} X \otimes \Delta^0 \xrightarrow{1 \otimes \Delta^{\partial^2}} X \otimes \Delta^1 \xrightarrow{h} Y) = f,$$

$$(X \xrightarrow{\rho^1} X \otimes \Delta^0 \xrightarrow{1 \otimes \Delta^{\partial^0}} X \otimes \Delta^1 \xrightarrow{h} Y) = g.$$

Тут  $\Delta^n = \mathbb{Z}\langle \Delta(-, [n]) \rangle \in s\text{fAb}$ ,  $\otimes$  означає пряму

допомогу  $\otimes: sA \times s\text{fAb} \rightarrow sA$   $f: [m] + [n] \in \Delta^{m+n}$

$$(X_n, X(f)|_{n,t}) \times (P_n, P(f)|_{n,t}) \mapsto (X_n \otimes P_n, X(f| \otimes P(f))|_{n,t})$$

$$\text{де } (g, k) \mapsto g \otimes k$$

проста до  $\otimes: A \times \text{fAb} \rightarrow A$

$$\cong (A \times \text{fAb} \xrightarrow{c} \text{fAb} \times A \xrightarrow{\otimes} A)$$

збігається з введеним раніше лівим дією  $\otimes$ ,  
 $c$  - функтор перестановки. Для кожного  $n$  ми маємо

$\otimes$ , а і ізоморфізми  $(X \otimes P) \otimes Q \cong X \otimes (P \otimes Q)$ , який  
 наданий історично, і ізоморфізми  $\rho: X \otimes \Delta^0 \rightarrow X$ ,  
 який задовольняє тем, що  $\Delta^0$  - одиничний  
 об'єкт симетричної моноїдальної категорії  $s\text{fAb}$ .

$$\Delta_n^0 = \mathbb{Z}, \forall n \geq 0.$$

DGA 7

$$N\Delta^0 = 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 =: \mathbb{Z} \text{ - такий одиничний об'єкт}$$

симметричної моніадальної категорії  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_0}(\neq \text{Ab})$ ,

$$N\Delta^1 = 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(1, -1)} \mathbb{Z}^2 \rightarrow 0 =: \mathbb{I} \text{ - інтервал.}$$

Вкладення  $\Delta^1, \Delta^0: \Delta^0 \rightarrow \Delta^1$  індукують вкладення

$$i_0 = N\Delta^1, i_1 = N\Delta^0: N\Delta^0 \rightarrow N\Delta^1, \text{ які зводяться}$$

до вкладення  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^2, 1 \mapsto (1, 0) \text{ або } (0, 1)$ .

Лемма про розширення між  $Nf$  і  $Ng$  - це

канонічне відображення  $h': NX \otimes N\Delta^1 \rightarrow NY$  таке

$$(NX \cong NX \otimes N\Delta^0 \xrightarrow{1 \otimes i_0} NX \otimes N\Delta^1 \xrightarrow{h'} NY) = Nf,$$

$$(NX \cong NX \otimes N\Delta^0 \xrightarrow{1 \otimes i_1} NX \otimes N\Delta^1 \xrightarrow{h'} NY) = Ng.$$

Функтор  $N$  піднімається до функтора

DEAP

комплекса Мура  $C: sA \rightarrow Ch_{\geq 0}(A)$ ,

$$X \mapsto ((X_n)_{n \geq 0}, (d = \sum_{j=0}^k (-1)^{kj} d_j : X_k \rightarrow X_{k-1})_{k \geq 1})$$

(вибір знаку пов'язаний з використанням  
правих операторів), див. (1.10)). Потримується  
з  $C$  за формулою

$$N(X) = \left( \text{im} \left( \prod_{k_1}^c C(X)_k \rightarrow C(X)_k \right)_{k \geq 0}, (d^N = \prod_{k_1}^c d^c \cdot \prod_{k_2}^c : N(X)_k \rightarrow N(X)_{k-1})_{k \geq 1} \right)$$

Функтор  $C$  відображає гомоморфізми симілярні  
морфізми  $f \sim g : X \rightarrow Y$  в гомоморфізми канцерові  
відображення  $Cf \sim Cg : CX \rightarrow CY$ .

Для переходу від семантичної моделі до алгебраїчної моделі використовується ланцюгове відображення Шенкелера-Зендлера, або \* відображення перетасовок: для  $a \in X_p, b \in Y_q$

$$sh : \mathbb{C}X \otimes \mathbb{C}Y \rightarrow \mathbb{C}(X \otimes Y), \quad X \in sA, Y \in s+B,$$

$$sh(a \otimes b) = \sum_{(\mu, \nu) \in (p, q)\text{-перетасовки}} (-1)^{\delta(\mu, \nu)} (s_{\nu_1} \dots s_{\nu_p} a \otimes s_{\mu_1} \dots s_{\mu_q} b)$$

$(\mu, \nu) \in (p, q)\text{-перетасовки}$

$(\mu, \nu) \in (p, q)\text{-перетасовки}$  розбивається  $[p+q-1]$  на 2 підмножини:  
 $\mu = \{\mu_1 < \dots < \mu_p\} ; \nu = \{\nu_1 < \dots < \nu_q\}$ .

DGA

Знак визначається сигнатурою підстановки  $(1 \ p \ p+1 \ \dots \ p+q)$ , а саме  $\text{sgn}(\mu, \nu)$

$$B(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^p [\mu_i - (i-1)]$$

Вправа sh-ланцюжок

$$C(\Delta^0) = \begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \rightarrow 0 \\ & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & \end{array}$$

Введемо ланцюжок відображення  $sh_0: \mathbb{Z} \rightarrow C(\Delta^0)$

$$sh_0 \begin{array}{ccccccc} \rightarrow 0 & \rightarrow 0 & \rightarrow 0 & \rightarrow \mathbb{Z} & \rightarrow 0 \\ & & & \downarrow 1 & & & & & & & \\ 1 \rightarrow \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \rightarrow 0 \end{array}$$

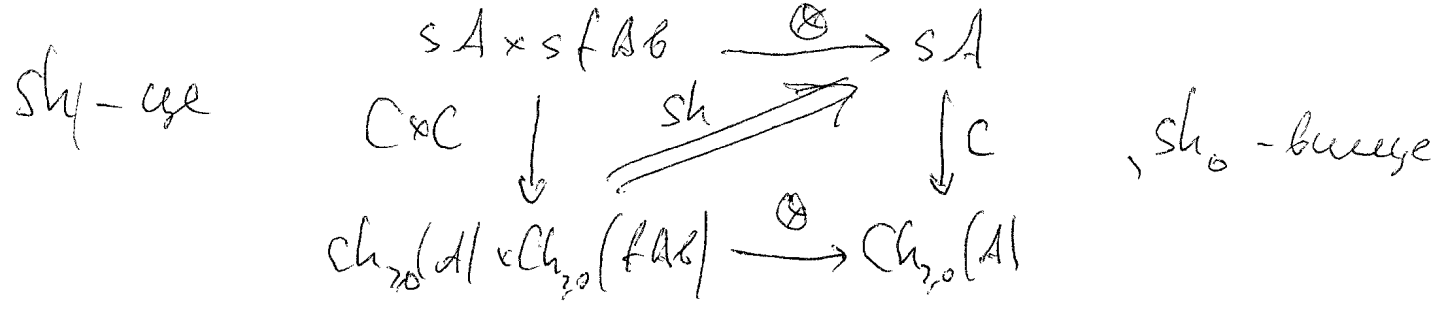
маємо

$$\begin{array}{ccc} C(X) \otimes \mathbb{Z} & \xrightarrow[\cong]{\rho} & C(X) \\ \downarrow \tau \otimes sh_0 & & \cong \uparrow C(\Delta^0) \\ C(X) \otimes C(\Delta^0) & \xrightarrow{sh} & C(X \otimes \Delta^0) \end{array}$$

Для  $\otimes: A \times fAB \rightarrow A$  производится на комплекс  $\otimes: Ch_{\geq 0}(A) \times Ch_{\geq 0}(fAB) \rightarrow Ch_{\geq 0}(A)$   
 $(A, B) \mapsto A \otimes B$

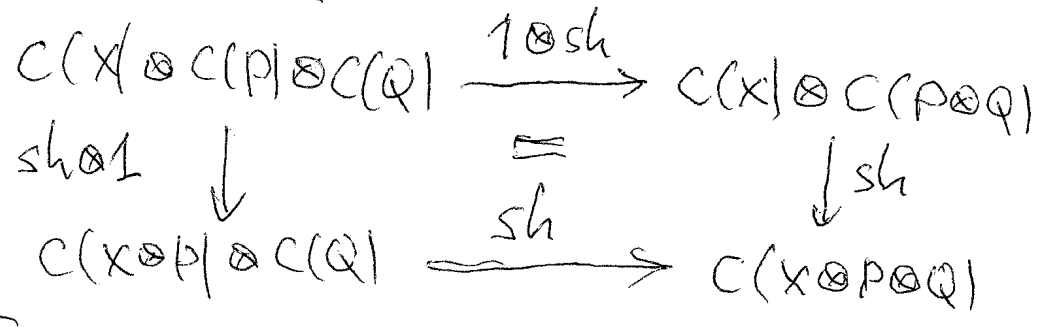
$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{k+l=n} A_k \otimes B_l, d^{A \otimes B} = d^A \otimes 1 + 1 \otimes d^B$   
 (правила операции, знак умножения)

Функция  $(C, sh, sh_0): sA \rightarrow Ch_{\geq 0}(A)$  удовлетворяет условиям в последнем сцене (par):

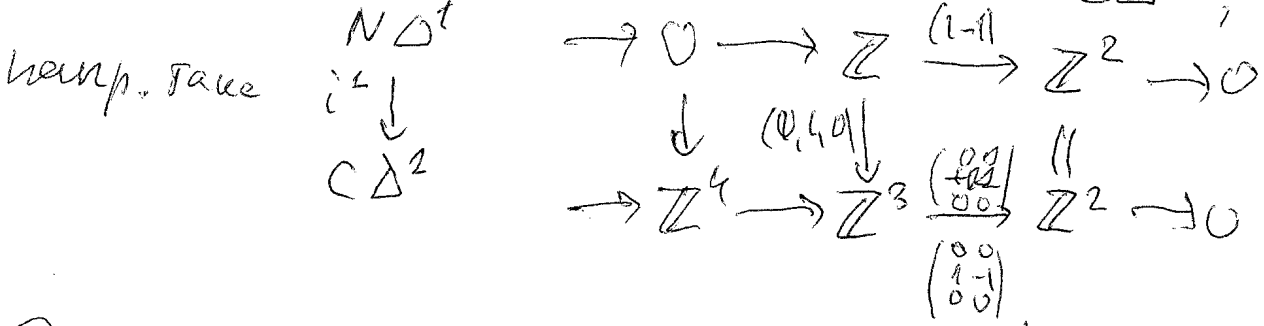


Вспоминается условие (9) i

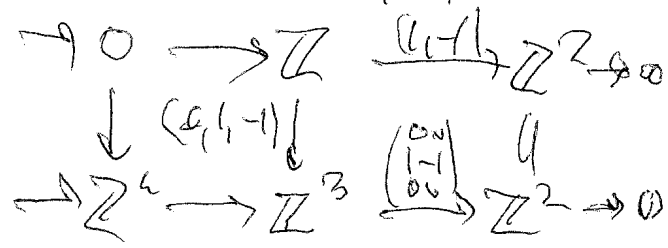
Вырава-задача:



Обернуто вынадежна  $i^{\mathbb{Z}}: N\Delta^2 \rightarrow C\Delta^2$



also  $i^{\mathbb{Z}}: C\Delta^2 \rightarrow C\Delta^1$   
 Take:



DGA II

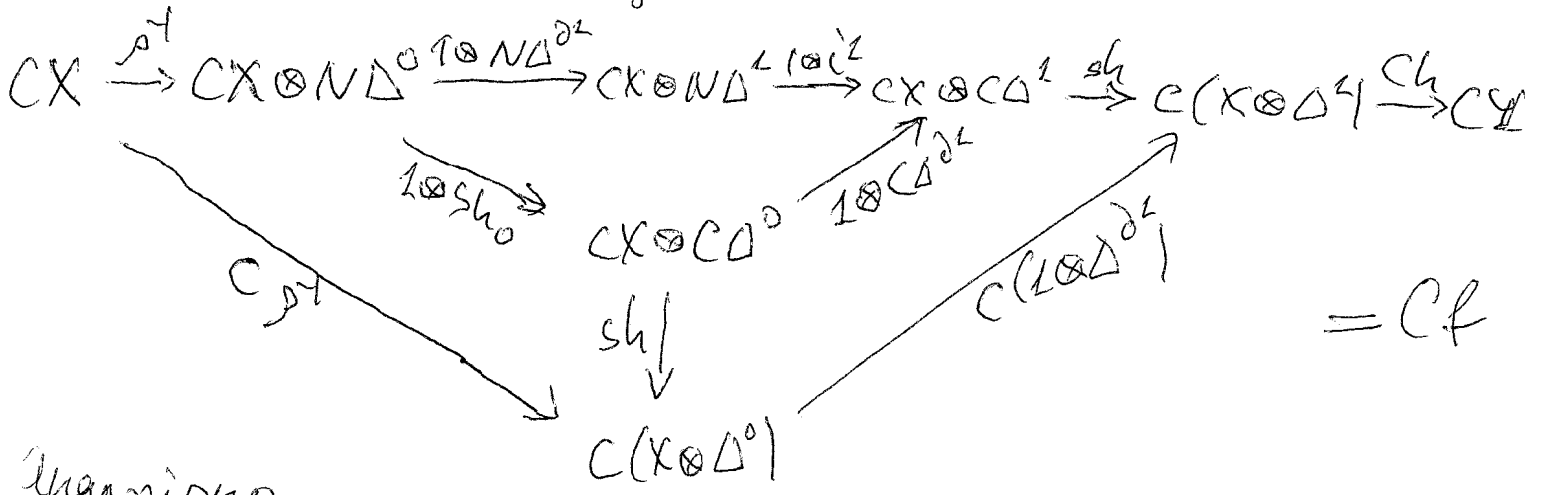
Тод комутативни алгебра

$$\begin{array}{ccc}
 N\Delta^0 & \xrightarrow{N\Delta^{\partial^2}} & N\Delta^1 \\
 \text{sh}_0 \downarrow & = & \downarrow i^{\partial^2} \\
 C\Delta^0 & \xrightarrow{C\Delta^{\partial^2}} & C\Delta^1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 N\Delta^0 & \xrightarrow{N\Delta^{\partial^0}} & N\Delta^1 \\
 \text{sh}_0 \downarrow & = & \downarrow i^{\partial^0} \\
 C\Delta^0 & \xrightarrow{C\Delta^{\partial^0}} & C\Delta^1
 \end{array}$$

Морфизм  $f \sim g : X \rightarrow Y$  задан как  $h : X \otimes \Delta^1 \rightarrow Y$  рассмотрим

$$h' = (CX \otimes N\Delta^1 \xrightarrow{1 \otimes i^{\partial^1}} CX \otimes C\Delta^1 \xrightarrow{\text{sh}} C(X \otimes \Delta^1) \xrightarrow{C_h} CY)$$

Уже известно  $Cf \sim Cg : CX \rightarrow CY$  очевидно



аналогично

$$(CX \xrightarrow{\rho^{\partial^1}} CX \otimes N\Delta^0 \xrightarrow{1 \otimes N\Delta^{\partial^0}} CX \otimes N\Delta^1 \xrightarrow{1 \otimes i^{\partial^1}} CX \otimes C\Delta^1 \xrightarrow{\text{sh}} C(X \otimes \Delta^1) \xrightarrow{C_h} CY) = Cg$$

Для  $A = R\text{-mod}$ ,  $R$ -коммутативные кольца, доведем, что имеет структура разложения (ex) фактора  $(\overline{\text{sh}}, \overline{\text{sh}}_0)$  на  $N$  та морфизм разложения фактора  $\rho \in \rho^{\partial^1} : CX \rightarrow NX$ , то есть

