DGA3

Існує функтор $F : \Delta^{op} \to \Delta$

$$[n] \mapsto [n+1]$$

$$(d_i : [n] \to [n-1]) \mapsto (\sigma^i : [n+1] \to [n]), \quad 0 \le i \le n,$$

$$(s_j : [n] \to [n+1]) \mapsto (\partial^{j+1} : [n+1] \to [n+2]), \quad 0 \le j \le n.$$

<u>Вправа</u>: Співвідношення між d_i, s_j переводяться у співвідношення між σ^i, ∂^{j+1}, отже, функтор F $\exists$.

<u>Зауваження</u>. $\forall f \in \mathrm{Mor}\,\Delta^{op}$ $F(f)$ переводить найменший елемент в найменший, а найбільший елемент в найбільший.

Нехай $(A,\ m : A \otimes A \to A,\ \eta : \mathbb{1} \to A)$ — алгебра (моноїд) в моноїдальній категорії $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$. Їй відповідає косимпліціальний об'єкт $\mathcal{C}$:

$A : \Delta \to \mathcal{C}$, $[n] \mapsto A^{\otimes [n]}$, $(f : [m] \to [n]) \mapsto (A^{\otimes f} : A^{\otimes [m]} \to A^{\otimes [n]})$,

де $A^{\otimes f}$ будується з m і η аналогічно до формули

$$A^{\otimes f}(x_0 \otimes \dots \otimes x_m) = \Big(\times_{i \in f^{-1}0} x_i, \dots, \times_{i \in f^{-1}n} x_i \Big),$$ де $\times_{i \in S} x_i$ — добуток елементів в лінійно впорядкованій множині S.

Компонуючи $\Delta^{op} \xrightarrow{F} \Delta \xrightarrow{A^{\otimes -}} \mathcal{C}$ отримуємо симпліціальний об'єкт $\mathcal{C}$, позначений $B(A)$.

$$B_n(A) \equiv B(A)_n = A^{\otimes(n+2)},$$ **DGA4**

$$d_i = 1^{\otimes i} \otimes m \otimes 1^{\otimes(n-i)} : A^{\otimes(n+2)} \to A^{\otimes(n+1)},$$

$$d_i(x_0 \otimes \dots \otimes x_{n+1}) = x_0 \otimes \dots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_{n+1}, \quad 0 \le i \le n,$$

$$s_j = 1^{\otimes(1+j)} \otimes \eta \otimes 1^{\otimes(n-j+1)} : A^{\otimes(n+2)} \to A^{\otimes(n+3)},$$

$$s_j(x_0 \otimes \dots \otimes x_{n+1}) = x_0 \otimes \dots \otimes x_j \otimes 1 \otimes x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_{n+1}, \quad 0 \le j \le n.$$

Кожне $B_n(A)$ є A-бімодулем відносно множення на крайній лівий або крайній правий елемент. Всі $B(A)(f)$ — гомоморфізми A-бімодулів.

Нехай A – $\Bbbk$-алгебра. Позначимо $\boxed{\text{ГА48}}$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{B^{-n}(A)}}{B_n(A)} = \begin{cases} A^{\otimes n+2}, & n \geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$ – градуйований A-бімодуль

Якщо A – вільний $\Bbbk$-модуль, то $B_n(A)$ – вільний A-бімодуль.

Оснастимо $B(A)$ диференціалом

$$d_n : B_n(A) \to B_{n-1}(A), \quad d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_n^i,$$

$$d_n^i(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = x_0 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1}$$

$d_n^i : B_n(A) \to B_{n-1}(A) \in A\text{-bimod}$.

<u>Вправа</u>: $d^2 = 0$.

Множення $\varepsilon = m : B_0(A) = A \otimes A \longrightarrow A$, аовнзав перетворює $B(A)$ на ліву резольвенту A-бімодуля A, тобто

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_2"] & \underset{\overset{\shortparallel}{A^{\otimes 3}}}{B_1(A)} \arrow[r, "d_1 = m\otimes 1 - 1\otimes m"] \arrow[d] & \underset{\overset{\shortparallel}{A\otimes A}}{B_0(A)} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon = m"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\bar{\varepsilon} : B(A) \to A$

$\bar{\varepsilon}$ – qis

Або ж: доповнимо $\overline{B}_n(A) = B_n(A)$, $n \geq 0$, членом $\overline{B}_{-1}(A) = A$ і диференціалом $d_0 = m$, $\overline{B}_n(A) = 0$ для $n < -1$. Тоді послідовність

$$\cdots \xrightarrow{d_2} \underset{\overset{\shortparallel}{A^{\otimes 3}}}{B_1(A)} \xrightarrow[m\otimes 1 - 1\otimes m]{d_1} \underset{\overset{\shortparallel}{A^{\otimes 2}}}{\overline{B}_0(A)} \xrightarrow[m]{d_0} \underset{\overset{\shortparallel}{A}}{\overline{B}_{-1}(A)} \longrightarrow 0$$

точна.

Твердження. Комплекс $\bar{B}(A)$ стягуваний в mod-A, тобто $\exists$ $\bar{h}_n : \bar{B}_n(A) \to \bar{B}_{n+1}(A) \in \text{mod-}A$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, такі що $d \circ \bar{h} + \bar{h} \circ d = 1$.

$\lhd$ Візьмемо

$$h_n(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = 1 \otimes x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}, \quad n \geq -1.$$

Маємо для $n \geq -1$

$$d(1 \otimes x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1} - 1 \otimes d(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1})$$

$\rhd$

Наслідок Ланцюгове відображення з $C(\text{mod}A)$

$$\chi : A \to B(A) \qquad \begin{tikzcd} \ar[r] & 0 \ar[r] \ar[d] & 0 \ar[r] \ar[d] & A \ar[r] \ar[d, "\bar{h}_{-1}"] & 0 \ar[r] \ar[d] & {} \\ \ar[r] & A^{\otimes 4} \ar[r, "d_2"] & A^{\otimes 3} \ar[r, "d_1"] & A^{\otimes 2} \ar[r] & 0 \ar[r] & {} \end{tikzcd}$$

$\bar{h}_{-1}(x) = 1 \otimes x$, χ - гомотопічно обернене до $\bar{\varepsilon} \in C(\text{mod-}A)$.

Справді, $d_0 \circ \bar{h}_{-1} = 1_A$ і тотожність

$$1 = d\bar{h} + \bar{h}d \qquad \begin{tikzcd} A^{\otimes 4} \ar[r, "d_2"] \ar[d] & A^{\otimes 3} \ar[r, "d_1"] \ar[d, "1"] \ar[dl, "\bar{h}_1"'] & A^{\otimes 2} \ar[r, "d_0"] \ar[d, "1"] \ar[dl, "\bar{h}_0"'] & A \ar[r] \ar[d, "1"] \ar[dl, "\bar{h}_{-1}"'] & 0 \\ A^{\otimes 4} \ar[r, "d_2"] & A^{\otimes 3} \ar[r, "d_1"] & A^{\otimes 2} \ar[r, "d_0"] & A \ar[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Можна переписати, поклавши $h_n = \bar{h}_n$, $n \geq 0$, $h_n = 0$, $n < 0$, як

$$\begin{matrix} 1 - \chi \circ \bar{\varepsilon} = \\ = d \circ h + h \circ d \end{matrix} \qquad \begin{tikzcd} A^{\otimes 4} \ar[r, "d_2"] \ar[d, "1"] & A^{\otimes 3} \ar[r, "d_1"] \ar[d, "1"] \ar[dl, "h_1"'] & A^{\otimes 2} \ar[r] \ar[d, "1 - \bar{h}_{-1} \circ d_0"] \ar[dl, "h_0"'] & 0 \\ A^{\otimes 4} \ar[r, "d_2"] & A^{\otimes 3} \ar[r, "d_1"] & A^{\otimes 2} \ar[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{DGA5}}$

Нехай M — A-бімодуль = лівий $A\otimes A^{op}$-модуль = правий $A\otimes A^{op}$-модуль (категорія $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, c)$ - симетрична). Тоді $M \underset{A\otimes A^{op}}{\otimes} B(A)$ - симпліціальний об'єкт з

$$[n] \longmapsto M\otimes A^{\otimes n}$$

$$d_i(m\otimes x_1\otimes \dots \otimes x_n) = \begin{cases} mx_1\otimes x_2\otimes \dots \otimes x_n, & \text{якщо } i=0 \\ m\otimes x_1\otimes \dots \otimes x_i x_{i+1}\otimes \dots \otimes x_n, & \text{якщо } 0<i<n \\ x_n m\otimes x_1\otimes \dots \otimes x_{n-1}, & \text{якщо } i=n \end{cases}$$

$$s_j(m\otimes x_1\otimes \dots \otimes x_n) = m\otimes x_1\otimes \dots \otimes x_j\otimes 1\otimes x_{j+1}\otimes \dots \otimes x_n .$$

9.1.1 Let R be a k-algebra and M an $R{-}R$ bimodule. We obtain a simplicial k-module $M \otimes R^{\otimes *}$ with $[n] \mapsto M \otimes R^{\otimes n}$ $(M \otimes R^{\otimes 0} = M)$ by declaring

$$\partial_i(m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) = \begin{cases} mr_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_n & \text{if } i = 0 \\ m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n & \text{if } 0 < i < n \\ r_n m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} & \text{if } i = n \end{cases}$$

$$\sigma_i(m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) = m \otimes \cdots \otimes r_i \otimes 1 \otimes r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n,$$

where $m \in M$ and the r_i are elements of R. These formulas are k-multilinear, so the ∂_i and σ_i are well-defined homomorphisms, and the simplicial identities are readily verified. (Check this!) The *Hochschild homology* $H_*(R, M)$ of R with coefficients in M is defined to be the k-modules

$$H_n(R, M) = \pi_n(M \otimes R^{\otimes *}) = H_n C(M \otimes R^{\otimes *}).$$

Here $C(M \otimes R^{\otimes *})$ is the associated chain complex with $d = \sum (-1)^i \partial_i$:

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\partial_0 - \partial_1} M \otimes R \xleftarrow{d} M \otimes R \otimes R \xleftarrow{d} \cdots.$$

For example, the image of $\partial_0 - \partial_1$ is the k-submodule $[M, R]$ of M that is generated by all terms $mr - rm$ $(m \in M, r \in R)$. Hence $H_0(R, M) \cong M/[M, R]$.

Similarly, we obtain a cosimplicial k-module with $[n] \mapsto \operatorname{Hom}_k(R^{\otimes n}, M) = \{k\text{-multilinear maps } f\colon R^n \to M\}$ $(\operatorname{Hom}(R^{\otimes 0}, M) = M)$ by declaring

$$(\partial^i f)(r_0, \cdots, r_n) = \begin{cases} r_0 f(r_1, \ldots, r_n) & \text{if } i = 0 \\ f(r_0, \ldots, r_{i-1}r_i, \ldots) & \text{if } 0 < i < n \\ f(r_0, \ldots, r_{n-1})r_n & \text{if } i = n \end{cases}$$

$$(\sigma^i f)(r_1, \cdots, r_{n-1}) = f(r_1, \ldots, r_i, 1, r_{i+1}, \ldots, r_n).$$

The *Hochschild cohomology* $H^*(R, M)$ of R with coefficients in M is defined to be the k-modules

$$H^n(R, M) = \pi^n(\operatorname{Hom}_k(R^{\otimes *}, M)) = H^n C(\operatorname{Hom}_k(R^{\otimes *}, M)).$$

Here $C\ \operatorname{Hom}_k(R^*, M)$ is the associated cochain complex

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial^0 - \partial^1} \operatorname{Hom}_k(R, M) \xrightarrow{d} \operatorname{Hom}_k(R \otimes R, M) \xrightarrow{d} \cdots.$$

For example, it follows immediately that

$$H^0(R, M) = \{m \in M : rm = mr \quad \text{for all } r \in R\}.$$

Exercise 9.1.1 If R is a commutative k-algebra, show that $M \otimes R^{\otimes *}$ is a simplicial R-module via $r \cdot (m \otimes r_1 \otimes \cdots) = (rm) \otimes r_1 \otimes \cdots$. Conclude that each $H_n(R, M)$ is an R-module. Similarly, show that $\operatorname{Hom}_R(R^{\otimes *}, M)$ is a cosimplicial R-module, and conclude that each $H^n(R, M)$ is an R-module.

Exercise 9.1.2 If $0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0$ is a k-split exact sequence of bimodules (8.7.7), show that there is a long exact sequence

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_i(R, M_0) \to H_i(R, M_1) \to H_i(R, M_2) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(R, M_0) \cdots.$$

Нехай $M \in A\text{-mod}$. Позначимо ГА50

$\bar{B}(A,M) = \bar{B}(A)\otimes_A M$ — ациклічний в $C(A\text{-mod})$, стягуваний в $C_{\mathbb{K}}$,

$B(A,M) = B(A)\otimes_A M$ — гомотопічно ізоморфний M в $C_{\mathbb{K}}$, ліва резольвента M в $C(A\text{-mod})$.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1(A,M) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, equal] & B_0(A,M) \arrow[d, equal] & & \\
\arrow[r] & A\otimes A\otimes M \arrow[r, "m\otimes 1 - 1\otimes\alpha_M"] \arrow[d, "\varepsilon_M"'] & A\otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Формули для диференціала і $\varepsilon_M = \alpha_M$ — ті самі, якщо вважати $x_{max} \in M$.

Якщо A, M — вільні $\mathbb{K}$-модулі, то $B(A,M) \xrightarrow{\varepsilon_M} M$ — вільна резольвента M.

Якщо M — проективний $\mathbb{K}$-модуль, то $B(A,M) \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_M} M$ — проективна резольвента M.

Наприклад, $\mathbb{K}$ — поле $\Rightarrow B(A,M)$ вільна.

<u>Озн.</u> Ліва резольвента $(B(A,M), \varepsilon_M)$ A-модуля M називається стандартною резольвентою.