ГЛАДКІ МНОГОВИДИ ТА ВІДОБРАЖЕННЯ

ЛИСТОК 1. ВСТУП ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1. Нехай M – топологічний многовид. Доведіть:

(1) будь-який гладкий атлас $\mathcal{A}$ на M міститься в деякому максимальному атласі $\widehat{\mathcal{A}}$.

(2) два гладких атласи $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ на M містятья в одному максимальному атласі тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ – гладкий атлас.

2. Для $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ нехай $\mathcal{A}_k = \{(\mathbb{R}^1, h_k : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1) \mid h_k(x) = x^k\}$.

(1) Доведіть, що при парних k множина $\mathcal{A}_k$ не є атласом на $\mathbb{R}^1$, а при непарних k множина $\mathcal{A}_k$ – атлас на $\mathbb{R}^1$.

(2) Нехай $\widehat{\mathcal{A}_k}$ – гладка структура на $\mathbb{R}^1$, породжена атласом $\mathcal{A}_k$. Доведіть, що гладкі структури $\widehat{\mathcal{A}_k}$ різні при різних k.

3. Для кожного $r > 0$ розглянемо відображення $\phi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задане формулою:

$$\phi_r(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ rt, & t \geq 0. \end{cases}$$

Доведіть, що атласи $\{(\mathbb{R}, \phi_r)\}_{r \geq 0}$ задають нескінченну сім'ю гладких структур на $\mathbb{R}$.

4. Нехай $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ – одиничне коло в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо відкриті множини $V_0, V_1 \subset S^1$ і відображення $\phi_i : V_i \to \mathbb{R}$, що задані формулами

$$V_0 = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \mid \alpha \in (0, 2\pi)\}, \qquad V_1 = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \mid \alpha \in (-\pi, \pi)\}, \qquad \phi_i(\cos\alpha, \sin\alpha) = \alpha,$$

де $i = 0, 1$. Доведіть, що $\mathcal{A}_* = \{(V_0, \phi_0), (V_1, \phi_1)\}$ – гладкий атлас на S^1.

5. Нехай $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n + 1 \mid \|x\| = 1\}$ – одинична n-вимірна сфера у $\mathbb{R}^n$. Для $i = 1, \ldots, n+1$ розглянемо такі підмножини $U_i^{\pm}$

$$U_i^+ = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in S^n \mid x^i > 0\}, \qquad U_i^- = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in S^n \mid x^i < 0\}$$

та відображення $\phi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^n$ задані формулою

$$\phi_i^{\pm}(x^1, x^2 \ldots, x^n) = (x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n).$$

Доведіть, що множина $\mathcal{A}_n = \{(U_i^{\pm}, \phi_i^{\pm})\}_{i=1}^{n+1}$ є гладким атласом на S^n.

6. Доведіть, що атласи $\mathcal{A}_*$ з Вправи 4 та $\mathcal{A}_1$ з Вправи 5 еквівалентні.

7. Нехай $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ – одиничне коло на компдексній площині $\mathbb{C}$ і $x : \mathbb{C} - \{i\} \to \mathbb{C}$, $y : \mathbb{C} - \{-i\} \to \mathbb{C}$ – відображення задані формулами:

$$x(z) = \frac{i + z}{1 + iz}, \qquad y(z) = \frac{1 + iz}{i + z}.$$

Використовуючи відображення x, y доведіть, що S^1 – 1-одновимірний підмноговид $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

8. Нехай $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < h\}$ – циліндр в $\mathbb{R}^3$, $h > 0$. Використовуючи атлас для S^1 з Вправи 4 або Вправи 5 побудуйте атлас на Q.

9. Нехай $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ – множина всіх $(n \times m)$-матриць з дійсними коефіцієнтами. Доведіть, що $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ є гладким многовидом.

10. Доведіть, що множина $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ усіх лінійних ізоморфізмів $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ є гладким многовидом (*Підказка:* скористайтесь Вправою 9).

Date: 30 березня 2020 р.

11. Нехай $\mathbb{R}P^n = \{$множина усіх 1-вимірних лінійних підпросторів в $\mathbb{R}^{n+1}\}$. Розглянемо відображення проекції $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^n$, яке визначене так:

$$\pi(x) = \{\text{пряма, що проходнить через } 0 \text{ і точку } x\}.$$

Для точки $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ через $[x]$ будемо позначати її клас в $\mathbb{R}P^n$, тобто $\pi(x) = [x]$.

(1) Для кожного $i = 1, 2, \ldots, n+1$ нехай $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ – множина усіх точок у яких i-та координата не рівна 0 :

$$\tilde{U}_i = \{(x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \mid x^i \neq 0\},$$

і нехай $U_i = \pi(\tilde{U}_i)$. Доведіть, що U_i – відкрита.

(2) Для кожного $i = 1, 2, \ldots, n+1$ визначемо відображення $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ за формулою:

$$\phi_i[x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}] = \Big(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\Big),$$

Доведіть, що відображення ϕ_i є коректно визначеним.

(3) Доведіть, що простір $\mathbb{R}P^n$ є топологічним n-многовидом (*Підказка:* для доведення локальної евклідовості скотистайтесь побудованими відображеннями ϕ_i).

(4) Доведіть, що множина $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ є гладким атласом на $\mathbb{R}P^n$. Многовид $\mathbb{R}P^n$ з гладкою структурою, породженою $\mathcal{A}$ називається n-вимірним (дійсним) проективним простором.

12. Узагальніть конструкцію з Вправи 11 на випадок комплексного проективного простору

$$\mathbb{C}P^n = \{\text{множина усіх 1-вимірних (над } \mathbb{C}) \text{ лінійних підпросторів в } \mathbb{C}^{n+1}\}.$$

Гладкі відображення

13. Нехай $f : N \to M$ і $g : M \to P$ – гладкі відображення між многовидами M, N, P. Доведіть, що $g \circ f : N \to P$ – гладке.

14. Нехай U – відкрита множина в гладкому многовиді M і $\phi : U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$ – дифеоморфізм на відкриту підмножину $\mathbb{R}^n$. Доведіть, що (U, ϕ) – карта у гладкій структурі на M.

15. Розглянемо гладкі многовиди з Вправи 2 Листка 1. Доведіть, що многовиди $(\mathbb{R}^1, \widehat{\mathcal{A}_k})$ і $(\mathbb{R}^1, \widehat{\mathcal{A}_l})$ є диферморфними.

16. Чи будуть гладкі многовиди з Вправи 1.3 Листка 1 дифеоморфними?

17. Нехай M, N – гладкі многовиди і $f : M \to N$ – дифеоморфізм. Доведіть, що $\dim M = \dim N$.

18. Нехай M – гладкий многовид. Доведіть, що множина $\mathrm{Diff}(M)$, що складається з дифеоморфізмів M є групою відносно композиції відображень.

19. Чи будуть наступні відображення диффеоморфізмами:

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xe^y, y)$,
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xe^y + y, xe^y - y)$,
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x, y, z - xy)$?

20. Нехай M_1, M_2 та N – гладкі многовиди. Доведіть, що відображення $(f_1, f_2) : N \to M_1 \times M_2$ – гладке тоді і тільки тоді, коли $f_i : N \to M_i$ – гладке, $i = 1, 2$.

21. Доведіть, що обмеження функції $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $y(a, b) = b$ на одиничне коло S^1 – гладка функція.

22. Нехай S^2 – одинична сфера в $\mathbb{R}^3$ і $f : S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$ – функція висоти. Доведіть, що f – гладка.

23. Доведіть, що $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$, $f[x, y, z] = \frac{yz+xz+xy}{x^2+y^2+z^2}$ є коректно визначеною та гладкою функцією.

24. Нехай $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – відображення, задане формулою $f(x, y, z) = (x\cos z - y\sin z, x\sin z + y\cos z, z)$. Доведіть, що $f|_{S^2}$ – дифеоморфізм одиничної сфери S^2.

25. Доведіть, що

(1) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ – група Лі відносно множення,
(2) добуток $G_1 \times G_2$ груп Лі G_1 та G_2 – група Лі,
(3) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ – група Лі відносно звичайних операцій.