Лема про змій. Нехай діаграма ТП51
в абелевій категорії $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "q"] & C &
\end{tikzcd}$$

комутативна і рядки точні. Тоді існує точна послідовність

$$\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\partial} \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} g \to \operatorname{Coker} h,$$

де 2 перші і 2 останні морфізми визначаються з комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} g \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} h \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Coker} f \arrow[r, "\tilde{j}"] & \operatorname{Coker} g \arrow[r, "\tilde{q}"] & \operatorname{Coker} h &
\end{tikzcd}$$

Досить вважати, що $\mathcal{A} = R\text{-mod}$ за теоремою Фрейда-Мітчела. Тоді ∂ задається формулою

$$\forall c' \in \operatorname{Ker} h \quad \partial(c') = \{ j^{-1} g p^{-1}(c') \} \in \operatorname{Coker} f.$$

◁ $p^{-1}(c') \neq \emptyset$ оскільки p - сюр'єкція. $\boxed{\text{ТП52}}$

$q g p^{-1}(c') = h p p^{-1}(c') = h c' = 0$ тому $g p^{-1}(c') \subset \mathrm{Im}\, j$

Отже, $j^{-1} g p^{-1}(c') \neq \emptyset$,

$\exists\, b' \in B' \quad p^{-1}(c') = b' + i(A')$

$\Rightarrow g p^{-1}(c') = g b' + j f(A')$ (отже, $g b' \in \mathrm{Im}\, j$.)

$\Rightarrow j^{-1} g p^{-1}(c') = j^{-1} g b' + f(A') = [j^{-1} g b']$ -

— коректно визначений елемент $\mathrm{Coker}\, f$.

R-лінійність очевидна.

Решта - гонитва по діаграмі. ▷

<u>Теорема</u> Нехай $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ точна в $C(\mathcal{A})$. Тоді $\exists$ довга точна послідовність

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^n(A) \to H^n(B) \to H^n(C) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(A) \to H^{n+1}(B) \to \dots$$

Природність ∂

Якщо

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

комутативна діаграма в $C(\mathcal{A})$, то

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(A) & \to & H^n(B) & \to & H^n(C) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n(A') & \to & H^n(B') & \to & H^n(C') & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}(A') \end{array}$$

комутує.

◁ Повторимо діаграму з леми про змію: (ТП753)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^{n-1}A \arrow[r] \arrow[d, hook] & Z^{n-1}B \arrow[r] \arrow[d, hook] & Z^{n-1}C \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"] & B^{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & C^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{n} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B^{n} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C^{n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& A^{n}/dA^{n-1} \arrow[r] & B^{n}/dB^{n-1} \arrow[r] & C^{n}/dC^{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Лише для того, щоб отримати верхній та нижній рядки. — точні(!) Такі рядки також поєднуються диференціалом в діаграму з леми про змію:

$$\begin{tikzcd}
& H^nA \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^nB \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^nC \arrow[d, hook] & \\
& A^n/dA^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & B^n/dB^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & C^n/dC^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^{n+1}A \arrow[r] \arrow[d] & Z^{n+1}B \arrow[r] \arrow[d] & Z^{n+1}C \arrow[d] & \\
& H^{n+1}A \arrow[r] & H^{n+1}B \arrow[r] & H^{n+1}C &
\end{tikzcd}$$

Лема про змію дає зв'язуючий гомоморфізм ∂. ▷

Лема про підкову. Нехай в діаграмі в абелевій категорії

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\alpha"] & L \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \\
 & & & & M \arrow[d, "b"] & \\
\cdots \arrow[r] & R_2 \arrow[r] & R_1 \arrow[r] & R_0 \arrow[r, "\gamma"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

стовпчик точний, а рядки – проективні резольвенти. Тоді з $Q_n = P_n \oplus R_n$ можна утворити проективну резольвенту об'єкта M та точну послідовність комплексів

$$0 \to P_\cdot \xrightarrow{i} Q_\cdot \xrightarrow{\pi} R_\cdot \to 0$$

де $i_n : P_n \hookrightarrow Q_n$, $\pi_n : Q_n \to R_n$ – канонічні вкладення та проекція.

◁ Піднімемо γ до $\tilde{\gamma} : R_0 \to M$, $\tilde{\gamma} \cdot b = \gamma$, оберемо $\beta = \left(Q_0 = P_0 \oplus R_0 \xrightarrow{\binom{\alpha \cdot a}{\tilde{\gamma}}} M\right)$.

Діаграму з двох правих точних стовпчиків доповнимо лівим стовпчиком до комутативної:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"'] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r, hook] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}"'] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[r] \arrow[d] & R_0 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

З леми про змію $\Rightarrow \operatorname{Coker}\beta = 0$

$\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\partial} 0 \to \operatorname{Coker}\beta \to 0$ - точна

З верхнього лівого квадрата $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta$ — мономорфізм. Отже, всі рядки і стовпчики точні. Продовжимо для

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\alpha \arrow[d] \\
 & & & \operatorname{Ker}\beta \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & R_2 \arrow[r] & R_1 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[d] \\
 & & & 0
\end{tikzcd}
$$

і збудуємо індуктивно комплекс $Q.$ та точну послідовність комплексів

$$0 \to P_\circ \xrightarrow{i} Q_\circ \xrightarrow{\pi} R_\circ \to 0$$ ГА 14

куди можна включити $P_{-1} = L$, $Q_{-1} = M$, $R_{-1} = N$. Оскільки $H^\bullet(P) = 0$ та $H^\bullet(R) = 0$ за лемою $H^\bullet(Q) = 0$, тобто Q – резольвента об'єкта M. ▷

Похідні функтори (у сенсі Картана-Ейленберга) $\boxed{\text{ГА 17}}$

Нехай абелева категорія $\mathcal{A}$ має вдосталь проективних об'єктів. Нехай
$(f: M \to N) \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}$, $P_\bullet \to M \to 0$ та
$Q_\bullet \to N \to 0$ - проективні резольвенти.
Тоді $\exists$ ланцюгове відображення резольвент $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$, що продовжує f:

ланцюгове відображення

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
{} \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\triangleleft$ Відображення f_0, f_1, f_2 знаходяться послідовно за індукцією.
f_0 завдяки проективності P_0

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_2"] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_1"] & & P_0 \arrow[r] \arrow[dd, "f_0"] \arrow[ddr] & M \arrow[r] \arrow[dd, "f"] & 0 \\
& & K_2 \arrow[dr, hook] & & K_1 \arrow[dr, hook] & & & \\
{} \arrow[r] & Q_2 \arrow[rr] \arrow[ur, two heads] & & Q_1 \arrow[rr] \arrow[ur, two heads] & & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Морфізми $Q_{i+1} \to Q_i$ розкладемо на епіморфізм та мономорфізм, проходячи через K_{i+1}. Маємо точні послідовності
$0 \to K_{i+1} \to Q_i \to K_i \to 0$.

Гомотопії між ланцюговими відображеннями

$\boxed{DGA\ 1}$

Аналог відрізка $[0,1] \cong \Delta^1_{top}$ в топології — ланцюговий комплекс

$$I = \quad \underset{}{0} \to \underset{1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(1,-1)} \underset{0}{\mathbb{Z}^2} \to 0$$

Базис $\mathbb{Z}$ позначимо $\xi = 1$, $\deg \xi = 1$, базис $\mathbb{Z}^2$ позначимо $e_0 = (1,0)$, $e_1 = (0,1)$, $\deg e_i = 0$.

Маємо вкладення i_0, i_1

$$i_j = \begin{array}{ccccccc} 0 & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \ {\scriptstyle 1 \mapsto e_j} & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{(1,-1)} & \mathbb{Z}^2 & \to & 0 \end{array}$$

<u>Озн.</u> Ланцюгові відображення $f, g : X \to Y$ між ланцюговими комплексами X, Y гомотопні, якщо існує ланцюгове відображення $k : X \otimes I \to Y$, таке, що $(1 \otimes i_0) \cdot k = f$, $(1 \otimes i_1) \cdot k = g$, тобто

$$(X = X \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{1 \otimes i_0} X \otimes I \xrightarrow{k} Y) = f,$$

$$(X = X \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{1 \otimes i_1} X \otimes I \xrightarrow{k} Y) = g.$$

Отже, $(x \otimes e_0)k = xf$, $(x \otimes e_1)k = g$. $\boxed{\text{ДГА 2}}$

Позначимо $xh = (x \otimes \xi)k$, $h: X \to Y$ — гомотопія, $\deg h = 1$.

Ланцюговість k на $x \otimes e_0$, $x \otimes e_1$ — це ланцюговість f, g.

<u>Вправа</u>. Ланцюговість k на $x \otimes \xi$ еквівалентна рівності

$$f - g = hd + dh$$

f_0, f_1, f_2 послідовно знаходяться. ▷

Для існування $f_\bullet$ вистачило б:

- Верхній рядок – комплекс, P_i – проективні,
- нижній рядок – точна послідовність.

<u>Озн</u>. Ланцюгові відображення $f, g : C^\bullet \to D^\bullet$ називаються гомотопними, якщо існує гомотопія $h : C^\bullet \to D^{\bullet-1}$ — відображення степеня -1, таке що $f - g = hd + dh$. Пишуть $f \sim g$.

<u>Твердження</u>. Якщо $P_\bullet \to M \to 0$, $Q_\bullet \to N \to 0$ проективні резольвенти, $f_\bullet, g_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ два продовження одного морфізма $f = g : M \to N \in A$, то $f_\bullet \sim g_\bullet$ – гомотопні.

◁ Розглядаючи $f_\bullet - g_\bullet$ зведемо питання до опису продовжень $0 : M \to N$: кожне таке продовження $f_\bullet$ має вигляд $hd + dh$.
Будуємо $h_1, h_2, \dots$ індуктивно; $h_0 = 0$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "d"] \arrow[dd] & & P_1 \arrow[rr, "d"] \arrow[ddll, "h_2"'] \arrow[dl] \arrow[dd, "f_1"] & & P_0 \arrow[r] \arrow[ddll, "h_1"'] \arrow[dl] \arrow[dd, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[dd, "0"] & 0 \\
& & K_2 \arrow[dr, hook] & & K_1 \arrow[dr, hook] & & & \\
{} \arrow[r] & Q_2 \arrow[rr, "d"'] \arrow[ur] & & Q_1 \arrow[rr, "d"'] \arrow[ur] & & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\exists h_1 : h_1 d = f_0$.

$\Rightarrow f_1 d = d f_0 = d h_1 d \Rightarrow (f_1 - d h_1) d = 0$

$\Rightarrow \exists h_2 : f_1 = d h_1 + h_2 d, \ \ldots$ $\triangleright$

<u>Озн</u>. Нехай A, B абелеві категорії; A має вдосталь проективних, функтор $F : A^{op} \to B$ – адитивний, для $\forall M \in \mathrm{Ob}\, A$ вибрана проективна резольвента $P_\bullet \to M \to 0$. $\forall n \geq 0$ n-тим похідним функтором $R^n F : A^{op} \to B$ називається $M \mapsto R^n F(M) = H^n(F(P_\bullet))$, $(f : M \to N) \mapsto H^n(F(f_\bullet))$, де

$$\begin{array}{ccccc} P_\bullet & \to & M & \to & 0 \\ {\scriptstyle f_\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ Q_\bullet & \to & N & \to & 0 \end{array}$$

– $\forall$ продовження f

<u>Зауваження</u>. $\forall$ продовження $f_\bullet, f_\bullet' : P_\bullet \to Q_\bullet$ морфізма f гомотопні $\Rightarrow F(f_\bullet), F(f_\bullet') : F(Q_\bullet) \to F(P_\bullet)$ гомотопні $\Rightarrow H^n(F(f_\bullet)) = H^n(F(f_\bullet')) : H^n(F(Q_\bullet)) \to H^n(F(P_\bullet))$

(Гомотопні ланцюгові відображення індукують рівні відображення в гомологіях).

$\forall$ проективні резольвенти $P_\bullet \to M \to 0$, $R_\bullet \to M \to 0$ модуля M гомотопічно ізоморфні: $\exists f_\bullet : P_\bullet \to R_\bullet$, $g_\bullet : R_\bullet \to P_\bullet$ т/що $f_\bullet g_\bullet \sim 1_{P_\bullet}$, $g_\bullet f_\bullet \sim 1_{R_\bullet}$.

Тому $F(P_\cdot)$ та $F(R_\cdot)$ гомотопічно $\boxed{ГА20}$ ізоморфні $\Rightarrow H^n(F(P_\cdot)) \simeq H^n(F(R_\cdot))$.
При іншому виборі резольвент функтор R^nF заміниться на ізоморфний.

Якщо F точний зліва: переводить точну послідовність $A \to B \to C \to 0$ в точну послідовність $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$, то $R^0F \simeq F$.

$\lhd$ $P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \to M \to 0$ перейде в точну послідовність
$$0 \to F(M) \to F(P_0) \xrightarrow{F(d_0)} F(P_1)$$
$$\Rightarrow F(M) \simeq \operatorname{Ker} F(d_0) = H^0(F(P_\cdot)) = R^0F(M). \rhd$$

<u>Приклад</u>. $\mathcal{A}$ – $\mathbb{k}$-лінійна абелева.
$\forall N \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ маємо функтор $F = h^N : \mathcal{A}^{op} \to \mathbb{k}\text{-mod}$,
$h^N(M) = \mathcal{A}(M, N)$ – точний зліва.
Похідні функтори $R^n h^N(M)$ позначаються
$$\operatorname{Ext}^n(M, N) = H^n(\mathcal{A}(P_\cdot, N)),$$
зокрема, $\operatorname{Ext}^0(M, N) \simeq \mathcal{A}(M, N)$.

Озн. Нехай X, Y — топологічні простори, $u: X \to Y$ — неперервне відображення.
Циліндр $u \rightleftharpoons \mathrm{Cyl}\, u = \left([0,1]\times X\right) \sqcup Y \big/ \sim$, де
$\forall x \in X \quad (1, x) \sim u(x)$
Конус $u = \mathrm{Cone}\, u = \{s\} \sqcup \mathrm{Cyl}\, u \big/ \sim$, де
$\forall x \in X \quad s \sim (0, x)$.

Між цими просторами маємо декілька неперервних відображень:

$\tilde{u}: X \hookrightarrow \mathrm{Cyl}\,u, \quad x \mapsto (0,x),$

$\alpha: Y \hookrightarrow \mathrm{Cyl}\,u, \quad y \mapsto y$

$\beta: \mathrm{Cyl}\,u \to Y, \quad y \mapsto y, \quad (t,x) \mapsto f(x),$

$\pi: Y \hookrightarrow \mathrm{Cone}\,u, \quad y \mapsto y,$

$\tilde{\pi}: \mathrm{Cyl}\,u \to \mathrm{Cone}\,u, \quad (t,x) \mapsto (t,x), \; y \mapsto y.$

Виконані співвідношення:

$$u = (X \xhookrightarrow{\tilde{u}} \mathrm{Cyl}\,u \xrightarrow{\beta} Y),$$

$$\pi = (Y \xhookrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}\,u \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathrm{Cone}\,u),$$

$$1_Y = (Y \xhookrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}\,u \xrightarrow{\beta} Y),$$

$$1_{\mathrm{Cyl}\,u} \sim (\mathrm{Cyl}\,u \xrightarrow{\beta} Y \xhookrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}\,u).$$

Зокрема, α та β – взаємно обернені гомотопічні ізоморфізми. Остання гомотопія залишає $y \in Y$ на місці і відображає $[0,1]\times X$ в себе:

$$[0,1]\times([0,1]\times X) \longrightarrow [0,1]\times X,$$

$$(s,t,x) \longmapsto (s+t-st, x).$$

$\exists$ алгебраїчні аналоги циліндра та конуса. Нехай A – адитивна (згодом абелева) категорія,

$C(\mathcal{A})$ - категорія комплексів в $\mathcal{A}$. $\boxed{\text{ГА36}}$

Для простоти запису робимо вигляд, що об'єкти $\mathcal{A}$ - множини, наприклад, $\mathcal{A} = A\text{-mod}$. Наступні вирази можна задавати і без елементів - матрицями.

<u>Озн</u>. Нехай X, Y - комплекси в $\mathcal{A}$, $u: X \to Y$ - ланцюгове відображення.

Комплекс $\mathrm{Cyl}\, u$ = циліндр u = градуйований об'єкт $X \oplus X[1] \oplus Y$ з диференціалом

$$d(x, \bar{x}, y) = (dx + \bar{x}, -d\bar{x}, dy - u\bar{x}),$$

або *
$$d = \begin{pmatrix} d & s^{-1} & 0 \\ 0 & -sds^{-1} & 0 \\ 0 & -us^{-1} & d \end{pmatrix}.$$

Комплекс $\mathrm{Cone}\, u$ = конус u = градуйований об'єкт $X[1] \oplus Y$ з диференц.

$$d(\bar{x}, y) = (-d\bar{x}, dy - u\bar{x}),$$ або *

$$d = \begin{pmatrix} -sds^{-1} & 0 \\ -us^{-1} & d \end{pmatrix}.$$

Тут $X[1]^k = X^{k+1}$; $s: X \to X[1]$, $x \mapsto x$, $\deg s = -1$; $s^{-1}: X[1] \to X$, $\deg s^{-1} = 1$.

Взагалі, $X[n]^k = X^{k+n}$; $s: X[n] \to X[n+1]$, $x \mapsto x$, $\deg s = -1$; $s^{-1}: X[n] \to X[n-1]$, $\deg s^{-1} = 1$.

Диференціал в $X[n]$ береться = $\boxed{\text{ГА37}}$

$d_{X[n]} = d_X^{[n]} = (-1)^n s^n \circ d_X \circ s^{-n}$.

<u>Вправа</u>. Перевірити, що $d^2 = 0$ для Cyl u та Cone u.

<u>Твердження</u>. ∃ ланцюгові відображення

$\tilde{u} : X \hookrightarrow \mathrm{Cyl}\, u$, $\tilde{u}(x) = (x, 0, 0)$,

$\alpha : Y \hookrightarrow \mathrm{Cyl}\, u$, $\alpha(y) = (0, 0, y)$,

$\beta : \mathrm{Cyl}\, u \to Y$, $\beta(x, \bar{x}, y) = u(x) + y$,

$\pi : Y \hookrightarrow \mathrm{Cone}\, u$, $\pi(y) = (0, y)$,

$\tilde{\pi} : \mathrm{Cyl}\, u \to \mathrm{Cone}\, u$, $\pi(x, \bar{x}, y) = (\bar{x}, y)$,

$\delta : \mathrm{Cone}\, u \to X[1]$, $\delta(\bar{x}, y) = \bar{x}$.

Виконані співвідношення:

$u = (X \xhookrightarrow{\tilde{u}} \mathrm{Cyl}\, u \xrightarrow{\beta} Y)$,

$\pi = (Y \xhookrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}\, u \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathrm{Cone}\, u)$,

$1_Y = (Y \xhookrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}\, u \xrightarrow{\beta} Y)$,

$1_{\mathrm{Cyl}\, u} \sim (\mathrm{Cyl}\, u \xrightarrow{\beta} Y \xhookrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}\, u)$.

◁ Комутація з диференціалом перевіряється безпосередньо. З співвідношення очевидні.

Для доведення гомотопності двох останніх відображень візьмемо ГА38

$h: Cyl\, u \to Cyl\, u$, $h(x, \bar{x}, y) = (0, x, 0)$,

або * $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\deg h = -1$.

маємо

$1_{Cyl\, u} - \alpha \circ \beta = h \circ d + d \circ h$. Справді, на елементі $(x, \bar{x}, y)$ маємо рівність

$(x, \bar{x}, y) - (0, 0, u(x) + y) = (x, \bar{x}, -ux) =$

$= (0, dx + \bar{x}, 0) + (x, -dx, -ux)$. ▷

Наслідок. $\forall$ морфізм комплексів розкладається в композицію мономорфізма та гомотопічного ізоморфізма:

$u = (X \xhookrightarrow{\alpha} Cyl\, u \xrightarrow{\beta} Y)$.