Differential graded algebras

Volodymyr Lyubashenko

13 квітня 2020 р.

Differential graded algebras

A differential graded algebra (or simply **dg**-algebra) A is a complex of $\mathbb{k}$-modules [equipped with a map $d\colon A \to A$ which is either degree 1 (cochain complex convention) or degree -1 (chain complex convention), $d \circ d = 0$] and a graded algebra that satisfies the condition:
$(a \cdot b)d = (-1)^{\deg(b)}(ad) \cdot b + a \cdot (bd)$, where deg is the degree of homogeneous elements. This says that the differential d respects the graded Leibniz rule.
For the case of cochain complexes we also speak of **cochain algebras**.
For the case of chain complexes we also speak of **chain algebras**.
A more succinct way to state the same definition is to say that a **dg**-algebra is a monoid object in the monoidal category of (co)chain complexes. A **dg**-morphism between **dg**-algebras is a (co)chain map which respects the multiplication.
A differential graded augmented algebra (also called an augmented **dg**-algebra) is a **dg**-algebra equipped with a **dg**-morphism to the ground ring $\mathbb{k}$ (the terminology is due to Henri Cartan).

Tensor product of differential graded algebras

If A, A' are two **dg**-algebras, then $A \otimes A'$ is a **dg**-algebra with

$$(a \otimes a')(b \otimes b') = (-1)^{|a'||b|} ab \otimes a'b'$$

for homogeneous $a, b \in A$, $a', b' \in A'$.
If ε, ε are augmentations of A and A' respectively, then $\varepsilon \otimes \varepsilon'$ is an augmentation of $A \otimes A'$.
A graded algebra A is said to be *graded commutative* if $ab = (-1)^{|a||b|} ba$ for each pair, a, b, of elements of A of homogeneous degree.
Commutativity is preserved by tensor product.

Приклади градуйовано-комутативних алгебр

1. Зовнішня алгебра $\wedge^\bullet M = T^\bullet M/(u \otimes u)_{u \in M}$ $\Bbbk$-модуля M, де M розглядаємо як градуйований $\Bbbk$-модуль, зосереджений в степені 1.
2. Для довільного градуйованого $\Bbbk$-модуля $M = M_\bullet$ маємо симетричну алгебру

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(M) = TM/(a \otimes b - (-)^{ab} b \otimes a, c \otimes c \mid a, b \in M_\bullet, c \in M_{\mathrm{odd}}) \\ \cong S(M_{\mathrm{even}}) \otimes \wedge(M_{\mathrm{odd}}), \end{aligned}$$

де S і $\wedge$ - звичайні симетрична і зовнішня алгебра.

Вправа

$$\mathrm{S}(M \oplus N) \simeq \mathrm{S}(M) \otimes \mathrm{S}(N).$$

Диференціювання

Означення

Нехай $f, g : A \to B$ – гомоморфізми градуйованих алгебр. (f, g)-диференціюванням називається $\Bbbk$-лінійне відображення $\xi : A \to B$ певного степеня, таке, що

$$(ab)\xi = (a)f \cdot (b)\xi + (-)^{b\xi}(a)\xi \cdot (b)g, \qquad \forall\, a, b \in A.$$

Градуйований $\Bbbk$-модуль (f, g)-диференціювань позначений $\mathrm{Der}(A, B)(f, g)$.

Вправа

Для $M \in \mathbf{gr}$ і градуйованої алгебри B

$$\begin{array}{c} \xi \mapsto \xi|_M \\ \mathrm{Der}(TM, B)(f, g) \cong \underline{\mathbf{gr}}(M, B). \\ \tilde{\psi} \longleftarrow\!\shortmid\, \psi \end{array}$$

Диференціювання зовнішньої алгебри

Нехай A – **gr**-алгебра, подана як фактор $\pi : TM \longrightarrow\!\!\triangleright\ TM/I \cong A$. Для гомоморфізмів градуйованих алгебр $f, g : A \to B$ маємо

$$\mathrm{Der}(TM/I, B)(f, g) \subset \mathrm{Der}(TM, B)(\pi \cdot f, \pi \cdot g) \cong \underline{\mathbf{gr}}(M, B),$$

звідки

$$\mathrm{Der}(TM/I, B)(f, g) \cong \{\psi \in \underline{\mathbf{gr}}(M, B)_\bullet \mid \tilde{\psi}(I) = 0\}.$$

Вправа

Знайти всі $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$-диференціювання зовнішньої алгебри $A = \mathrm{S}M (= \wedge M)$, $M = M_1$. Знайти всі диференціали степеня -1.

Задача

Знайти всі $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$-диференціювання степеня -1 симетричної алгебри $A = SM$ для $M_\bullet$, зосередженого в степенях 1 і 2. Знайти всі диференціали степеня -1.

Приклад диференціальних форм

M – гладкий многовид, $A = \Omega^\bullet(M)$ – коланцюгова алгебра гладких диференціальних форм на M. Лише для $0 \leqslant k \leqslant \dim M$ маємо $\Omega^k(M) \neq 0$. Диференціал $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ – диференціал де Рама. Якщо $M = \mathbb{R}^n$, то $\Omega^k(\mathbb{R}^n) = \wedge^k_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отже, локально диференціальні форми влаштовані як зовнішні степені.

Вищенаведені твердження про диференціювання стосуються не лише асоціативних алгебр з 1

Вправа: $(1)d = 0$.

але і неасоціативних алгебр, наприклад, градуйованих алгебр Лі.

Озн. Диференціально-градуйована $\mathbb{k}$-алгебра Лі L — це

- градуйований $\mathbb{k}$-модуль $(L^i)_{i\in\mathbb{Z}}$;
- $\mathbb{k}$-лінійні відображення $d: L^i \to L^{i+1}$, $i\in\mathbb{Z}$;
- $\mathbb{k}$-білінійні відображення $[\,,\,]: L^i\times L^j \to L^{i+j}$,

такі що

1) Дужки кососиметричні:
$$[a,b] = -(-1)^{\bar a \bar b}[b,a] \quad \text{для } a\in L^{\bar a},\ b\in L^{\bar b}$$
2) Виконана тотожність Якобі
$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{\bar a \bar b}[b,[a,c]]$$
для всіх $a\in L^{\bar a}$, $b\in L^{\bar b}$, $c\in L^{\bar c}$.
3) d — диференціал: $d^2=0$.
4) d — диференціювання (праве):
$$[a,b].d = [a,b.d] + (-1)^{\bar b}[a.d,b]$$
5) $a\in L^{\bar a}$, $\bar a$ — парне $\Rightarrow [a,a]=0$.
6) $\theta\in L^{\bar\theta}$, $\bar\theta$ — непарне $\Rightarrow [[\theta,\theta],\theta]=0$

Якщо d — праве диференц-я, то $\vec{d}$ — ліве: $\vec{d}.a = (-)^{\bar a} a.d$. Вправа.

5), 6) непотрібні для поля $\mathbb{k}$, $\operatorname{char}\mathbb{k}\neq 2,3$, оскільки

1) $\Rightarrow 2[a,a]=0$, 2) $\Rightarrow 3[[\theta,\theta],\theta]=0$.

Вправи

Нехай A – якась градуйована алгебра,
$\mathfrak{a} = \operatorname{Der} A = \operatorname{Der}(A, A)(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$ – градуйований $\Bbbk$-модуль її диференціювань.

Вправа

$\mathfrak{a}$ разом з комутатором $[\xi, \eta] = \xi \cdot \eta - (-1)^{\xi\eta}\eta \cdot \xi$
є градуйованою алгеброю Лі.

Підказка: спочатку розглянути

Вправа

A з нульовим множенням. Тоді $\operatorname{Der} A = \underline{\mathbf{gr}}(A, A)$
є градуйованою алгеброю Лі.

Вправа

Якщо (A, d) – **dg**-алгебра, то $(\operatorname{Der} A, [\text{-}, d])$ – **dg**-алгебра Лі.

Homology

In a chain complex

$$C = (\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \cdots)$$

the composition of any two consecutive boundary operators is trivial: $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Equivalently $\mathrm{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$, where $\mathrm{im}(\partial_{n+1})$ denotes the image of the boundary operator and $\ker(\partial_n)$ its kernel. Elements of $B_n(C) = \mathrm{im}(\partial_{n+1})$ are called boundaries and elements of $Z_n(C) = \ker(\partial_n)$ are called cycles. The quotient

$$H_n(C) := \ker(\partial_n)/\mathrm{im}(\partial_{n+1}) = Z_n(C)/B_n(C),$$

is called the nth homology object of C. In Ab the elements of $H_n(C)$ are called homology classes. Each homology class is an equivalence class over cycles and two cycles in the same homology class are said to be homologous. A chain complex is said to be exact if the image of the $(n+1)$th map is always equal to the kernel of the nth map. The homology groups of C therefore measure “how far” the chain complex is from being exact.

Cohomology

Cohomology groups are formally similar to homology groups: one starts with a cochain complex; then the groups $\ker(d^n) = Z^n(C)$ of cocycles and $\mathrm{im}(d^{n-1}) = B^n(C)$ of coboundaries follow from the same description. The nth cohomology group of C is then the quotient group

$$H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C),$$

in analogy with the nth homology group.

Проєктивний модуль

Модуль P над кільцем R (як правило, вважається асоціативним з одиничним елементом), називається проєктивним, якщо для будь-якого гомоморфізма $g\colon P \to M$ і епіморфізма $f\colon N \longrightarrow\!\!\!\triangleright\, M$ існує такий гомоморфізм $h\colon P \to N$, що $g = f \circ h$, тобто дана діаграма є комутативною:

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\exists h"'] \arrow[d, "g"] \\
N \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}
$$

Вправа

Модуль P є проєктивним тоді і тільки тоді, коли існує такий модуль K, що пряма сума $F = P \oplus K$ є вільним модулем.

Зауваження

P є проєктивним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого епіморфізма $f\colon N \to M$ індукований гомоморфізм $f_*\colon \mathrm{Hom}(P, N) \to \mathrm{Hom}(P, M)$ теж є епіморфізмом.

Вправа

P є проєктивним тоді і тільки тоді, коли він переводить будь-яку коротку точну послідовність $0 \to A \to B \to C \to 0$ в точну послідовність $0 \to \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, C) \to 0$.

Вправа

Модуль P є проєктивним тоді і тільки тоді, коли кожна коротка точна послідовність модулів виду

$$0 \to A \to B \xrightarrow{f} P \to 0$$

розщеплюється. Тобто для відображення $f : B \to P$ на діаграмі існує відображення $h : P \to B$, таке що $f \circ h = \mathrm{id}_P$. У цьому випадку $h(P)$ є прямим доданком модуля B, h є ізоморфізмом із P на $h(P)$, а $h \circ f$ є проєкцією на $h(P)$.

Проєктивний об'єкт

Об'єкт P у категорії $\mathcal{C}$ називається проєктивним якщо для довільного епіморфізма $f : N \twoheadrightarrow M$ і морфізма $g : P \to M$, існує морфізм $h : P \to N$ для якого $f \circ h = g$, тобто існує комутативна діаграма:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\exists h"'] \arrow[d, "g"] \\
N \arrow[r, two heads, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

Епіморфізм у категорії – морфізм $f : X \to Y$, для якого із будь-якої рівності $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ випливає, що $g_1 = g_2$.
У локально малій категорії $\mathcal{C}$ P є проєктивним якщо і тільки якщо функтор $\mathrm{Hom}(P, -) \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ зберігає епіморфізми.

Зауваження

Нехай $\mathcal{C}$ — локально мала абелева категорія. У цьому випадку об'єкт $P \in \mathcal{C}$ є проєктивним якщо $\mathrm{Hom}(P, -) \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ є точним функтором.

Вправа

Кожна послідовність виду $0 \to U \to V \to P \to 0$ є точною у $\mathcal{C}$ тоді і тільки тоді коли вона розщеплюється, тобто V є ізоморфним прямій сумі $U \oplus P$.

Означення

Нехай $\mathcal{A}$ — абелева категорія. Кажуть, що $\mathcal{A}$ має достатньо проєктивних об'єктів якщо для кожного об'єкта A у $\mathcal{A}$ існує проєктивний об'єкт P у $\mathcal{A}$ і епіморфізм $p\colon P \to A$.

Зауваження

Твердження про те, що всі множини є проєктивними об'єктами є еквівалентним аксіомі вибору.

Ін'єктивний об'єкт

Об'єкт Q категорії C називається ін'єктивним, якщо для будь-якого морфізма $g : M \to Q$ і будь-якого мономорфізма $f : M \hookrightarrow N$ існує (не обов'язково єдиний) морфізм $h : N \to Q$, для якого $h \circ f = g$:

$$\begin{tikzcd}
 & Q \\
N \arrow[ur, "\exists h"] & M \arrow[l, hook', "f"'] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Мономорфізм — морфізм $f : X \to Y$, для якого із будь-якої рівності $f \circ g_1 = f \circ g_2$ випливає, що $g_1 = g_2$.
У локально малих категоріях, об'єкт Q є ін'єктивним тоді і тільки тоді коли контраваріантний функтор $\mathcal{C}(-, Q)$ переводить мономорфізми у $\mathcal{C}$ у сюр'єктивні відображення множин.