Dold–Kan correspondence, revisited

Комплекси

Volodymyr Lyubashenko

5 квітня 2020 р.

Closed symmetric monoidal category

A symmetric monoidal category $\mathcal{C}$ is **closed** if for all objects $b \in \mathcal{C}$ the functor $b \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ has a right adjoint functor $\underline{\mathcal{C}}(b, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
This means that for all $a, b, c \in \mathcal{C}$ we have a natural bijection

$$\mathcal{C}(b \otimes a, c) \simeq \mathcal{C}(a, \underline{\mathcal{C}}(b, c)),$$

natural in all arguments.
The object $\underline{\mathcal{C}}(b, c)$ is called the **internal hom** of b and c.
The evaluation morphism $\mathrm{ev} : b \otimes \underline{\mathcal{C}}(b, c) \to c$ corresponds to $\mathrm{id}_{\underline{\mathcal{C}}(b,c)}$.

$\Bbbk$ – комутативне кільце з одиницею.
$(\Bbbk\text{-Mod}, \otimes_\Bbbk, \Bbbk, c : X \otimes_\Bbbk Y \to Y \otimes_\Bbbk X, x \otimes y \mapsto y \otimes x)$ – симетрична моноїдальна категорія $\Bbbk$-модулів. Вона замкнена з внутрішнім hom'ом

$$\underline{\Bbbk\text{-Mod}}(X, Y) = \{\Bbbk\text{-лінійні відображення } X \to Y\}$$

і взяттям значення

$$\mathrm{ev} : X \otimes_\Bbbk \underline{\Bbbk\text{-Mod}}(X, Y) \to Y, \quad x \otimes f \mapsto (x)f.$$

Тензорне множення градуйованих модулів

$\mathbf{gr} = \mathbf{gr}$-$\Bbbk$-Mod означає $\mathbb{Z}$-градуйовані $\Bbbk$-модулі $X = X^\bullet = (X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (або $X = X_\bullet = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$). Це симетрична моноїдальна категорія з тензорним добутком $X \otimes Y$

$$(X \otimes Y)^n = \bigoplus_{k+l=n} X^k \otimes_\Bbbk Y^l, \qquad (X \otimes Y)_n = \bigoplus_{k+l=n} X_k \otimes_\Bbbk Y_l,$$

одиничним об'єктом $\Bbbk$ (зосередженим в степені 0), симетрією $c : X \otimes Y \to Y \otimes X$. Для однорідних елементів $x \in X^k$, $y \in Y^l$ ($x \in X_k$, $y \in Y_l$) степеня $\deg x = k$, $\deg y = l$, маємо

$$c(x \otimes y) = (-1)^{kl} y \otimes x = (-1)^{\deg x \cdot \deg y} y \otimes x = (-)^{xy} y \otimes x.$$

Замкненість категорії градуйованих модулів

Категорія **gr** замкнена з внутрішнім hom'ом $\underline{\mathbf{gr}}(X,Y)$

$$\underline{\mathbf{gr}}(X,Y)^n = \prod_{l-k=n} \underline{\Bbbk\text{-Mod}}(X^k,Y^l), \quad \underline{\mathbf{gr}}(X,Y)_n = \prod_{l-k=n} \underline{\Bbbk\text{-Mod}}(X_k,Y_l)$$

$$f = (f^k)_{k\in\mathbb{Z}}, \qquad\qquad f = (f_k)_{k\in\mathbb{Z}},$$

і взяттям значення

$$\mathrm{ev} : X \otimes \underline{\mathbf{gr}}(X,Y) \to Y, \quad x \otimes f \mapsto (x)f^k, \quad \text{де } \deg x = k.$$

Tensor product of homogeneous mappings $f : X \to Y$, $g : U \to V$ between graded $\Bbbk$-modules means the following mapping $X \otimes U \to Y \otimes V$ of the degree $\deg f + \deg g$:

$$(x \otimes u).(f \otimes g) = (-1)^{\deg u \cdot \deg f} x.f \otimes u.g = (-1)^{uf} x.f \otimes u.g.$$

$\mathbf{dg} = \mathbf{dg}\text{-}\Bbbk\text{-}\mathrm{Mod} = \mathrm{Ch}^\bullet$ або $\mathrm{Ch}_\bullet$ означає комплекси $\Bbbk$-модулів = $\mathbb{Z}$-градуйовані $\Bbbk$-модулі X, оснащені диференціалом $d \in \underline{\mathbf{gr}}(X^\bullet, X^\bullet)^1$ або $d \in \underline{\mathbf{gr}}(X_\bullet, X_\bullet)_{-1}$ з умовою $d^2 = 0$, тобто

$$\dots \xrightarrow{d} X^{n-1} \xrightarrow{d} X^n \xrightarrow{d} X^{n+1} \xrightarrow{d} \dots, \dots \xrightarrow{d} X_{n+1} \xrightarrow{d} X_n \xrightarrow{d} X_{n-1} \xrightarrow{d} \dots$$

Морфізми = ланцюгові відображення $f : X \to Y$ = комутативні драбини

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d"] & X^{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X^n \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X^{n+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "d"] & Y^{n-1} \arrow[r, "d"] & Y^n \arrow[r, "d"] & Y^{n+1} \arrow[r, "d"] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d"] & X_{n+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X_n \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X_{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "d"] & Y_{n+1} \arrow[r, "d"] & Y_n \arrow[r, "d"] & Y_{n-1} \arrow[r, "d"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Категорії $\mathrm{Ch}^\bullet$ і $\mathrm{Ch}_\bullet$ ізоморфні завдяки ізоморфізму перенумерування $X^\bullet \mapsto X_\bullet = (X_n = X^{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $f^\bullet \mapsto f_\bullet = (f_n = f^{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$. Тому достатньо говорити про $\mathrm{Ch}^\bullet$.

Категорія **dg** моноїдальна: $X \otimes Y \in \mathbf{gr}$ оснащується диференціалом $d \otimes 1 + 1 \otimes d$.

Застереження:
$(x \otimes y).(d \otimes 1 + 1 \otimes d) = (-1)^y (x.d) \otimes y + x \otimes (y.d)$. Одиничний об'єкт $= \Bbbk$ зосереджений в степені 0. Категорія **dg** симетрична: симетрія $c : X \otimes Y \to Y \otimes X$ збігається з симетрією в **gr**.

Вправа: симетрія є ланцюговим відображенням.

Категорія **dg** замкнена з внутрішнім hom'ом $\underline{\mathbf{dg}}(X, Y) = \underline{\mathbf{gr}}(X, Y)$ оснащеному диференціалом $(f)d = f \cdot d_Y - (-)^f d_X \cdot f$.

Вправа: $d^2 = 0$.

Відображення взяття значення $\mathrm{ev} : X \otimes \underline{\mathbf{dg}}(X, Y) \to Y$ береться з **gr**.

Вправа: ev – ланцюгове відображення.

Для $\forall$ комплекса X позначимо (ко)цикли і (ко)межі

$$Z^n X = \mathrm{Ker}(d : X^n \to X^{n+1}) \supset B^n X = \mathrm{Im}(d : X^{n-1} \to X^n).$$

Зокрема, $Z^0 \underline{\mathbf{dg}}(X, Y) = \mathbf{dg}(X, Y)$.

Recall that fAb $\subset$ Ab is the full subcategory of finitely generated free abelian groups. The symmetric monoidal category $(\mathrm{fAb}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ is rigid. The dual object functor is a contravariant self-equivalence

$$\text{-}^{\vee} : \mathrm{fAb}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{fAb}, \qquad M \mapsto M^{\vee} = \underline{\mathrm{Ab}}(M, \mathbb{Z}),$$
$$f = \big((f_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m\big) \mapsto f^{\vee} = {}^t f$$
$$= \big(({}^t f_{ji})_{j=1}^{m}{}_{i=1}^{n} = (f_{ij})_{j=1}^{m}{}_{i=1}^{n} : (\mathbb{Z}^m)^{\vee} = \mathbb{Z}^m \to (\mathbb{Z}^n)^{\vee} = \mathbb{Z}^n\big)$$

Using it we define an action

$$\underline{\mathrm{Hom}} = \big(\mathrm{fAb}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \xrightarrow{\text{-}^{\vee} \times 1} \mathrm{fAb} \times \mathcal{A} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{A}\big), \qquad (M, X) \mapsto M^{\vee} \otimes X.$$

Restricting the consideration to the full skeletal subcategory of fAb spanned on $\mathbb{Z}^n$, $n \geqslant 0$, we get $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}^n, X) = X^n$, $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}^n, g : X \to Y) = g^n : X^n \to Y^n$, $\underline{\mathrm{Hom}}\big((f_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m, X\big) = (f_{ij})_{j=1}^{m}{}_{i=1}^{n} : X^m \to X^n$. The two actions of fAb on $\mathcal{A}$ are adjoint: for all $M \in$ fAb there is a bijection

$$\mathcal{A}(M \otimes A, B) \cong \mathcal{A}(A, \underline{\mathrm{Hom}}(M, B)),$$

natural in $A, B \in \mathcal{A}$, M.

Action of bounded complexes

We extend functor $\underline{\mathrm{Hom}}$ to the action of bounded complexes $\mathrm{Ch}_b(\mathrm{fAb})$

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}} : \mathrm{Ch}_b(\mathrm{fAb})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) &\to \mathrm{Ch}(\mathcal{A}),\\ (F_\bullet, C_\bullet) &\mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(F, C)_\bullet,\\ \underline{\mathrm{Hom}}(F, C)_l &= \bigoplus_{i \in \operatorname{supp} F} \underline{\mathrm{Hom}}(F_i, C_{i+l}),\end{aligned}$$

where $\operatorname{supp} F = \{i \in \mathbb{Z} \mid F_i \ncong 0\}$, and the differential $d : \underline{\mathrm{Hom}}(F, C)_l \to \underline{\mathrm{Hom}}(F, C)_{l-1}$ is given by

$$\begin{aligned}&\bigoplus_{i \in \operatorname{supp} F} \underline{\mathrm{Hom}}(F_i, d)\\ &- (-1)^l \sum_{i \in \operatorname{supp} F \cap (\operatorname{supp} F - 1)} \mathrm{pr}_i \cdot\\ &\qquad [\underline{\mathrm{Hom}}(d, C_{i+l}) : \underline{\mathrm{Hom}}(F_i, C_{i+l}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(F_{i+1}, C_{i+l})] \cdot \mathrm{in}_{i+1} \,.\end{aligned}$$

Representing object

Let X vary over $\mathcal{A}$. Given $F_\bullet \in \mathrm{Ch}_b(\mathrm{fAb})$, $C_\bullet \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ consider the functor

$$\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}, \qquad X \mapsto Z_0\mathcal{A}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(F, C)).$$

For complexes $F_\bullet = \wedge^{[\bullet]}\mathbb{Z}^{[n]} \in \mathrm{Ch}_{[0,n]}(\mathrm{fAb})$ this functor is representable by an object of $\mathcal{A}$ denoted $Z_0 \underline{\mathrm{Hom}}(F, C)$:

$$Z_0\mathcal{A}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(F, C)) \cong \mathcal{A}(X, Z_0 \underline{\mathrm{Hom}}(F, C)). \tag{1}$$

In fact,

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[-]}\mathbb{Z}^{[n]}, C))_0]_k \\
&\qquad = \{(x_{i_0\dots i_k} : X \to C_k)_{i_0\dots i_k} \mid 0 \leqslant i_0 < \dots < i_k \leqslant n\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Z_0\mathcal{A}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[-]}\mathbb{Z}^{[n]}, C)) = \\
&\qquad \{(x_{i_0\dots i_k})^{0\leqslant k\leqslant n}_{i_0\dots i_k} \in \mathcal{A}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[-]}\mathbb{Z}^{[n]}, C)_0) \mid \\
&\qquad\qquad x_{i_0\dots i_k}.d = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} x_{i_0\dots\widehat{i_j}\dots i_k} \forall k, i_0, \dots, i_k\},
\end{aligned} \tag{2}$$

We separate variables $x_{i_0 \dots i_k}$ into two kinds: variables with $i_k = n$ we consider as parameters and variables with $i_k < n$ we consider as linear functions of these parameters:

$$x_{i_0 \dots i_k} = x_{i_0 \dots i_k n}.d + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} x_{i_0 \dots \widehat{i_j} \dots i_k n}. \tag{3}$$

Exercise

From $d^2 = 0$ deduce that substitution (3) turns all equations from (2) into identities.

Therefore, (3) provides natural isomorphism (1) in Ab with

$$Z_0 \, \underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[-]}\mathbb{Z}^{[n]}, C) = \bigoplus_{k=0}^{n} \underline{\mathrm{Hom}}\Big(\bigoplus_{0 \leqslant i_0 < \dots < i_k = n} \mathbb{Z}, C_k \Big)$$

$$= \bigoplus_{k=0}^{n} \bigoplus_{e:[k] \hookrightarrow [n] \in \Delta}^{e(k)=n} C_k .$$

Let us find a right adjoint functor $K : \mathsf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A}) \to S\mathcal{A}$ to the equivalence $N : S\mathcal{A} \to \mathsf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A})$. For $A \in S\mathcal{A}$, $C \in \mathsf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A})$ we have

$$\mathsf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A})(NA, C) = \mathsf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A})\Big(\int^{[p]\in\Delta} \wedge^{[\_]}\mathbb{Z}^{[p]} \otimes A_p, C\Big)$$

$$= \Big\{(h^p : \wedge^{[\_]}\mathbb{Z}^{[p]} \otimes A_p \to C)_{p\geqslant 0} \mid h^p = (h^p_k)_{k\geqslant 0} \in \mathsf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A}),$$

$$\forall f : [m] \to [n] \in \Delta,\ k \geqslant 0 \quad \begin{array}{ccc} \wedge^{[k]}\mathbb{Z}^{[m]} \otimes A_n & \xrightarrow{1\otimes A(f^{\mathrm{op}})} & \wedge^{[k]}\mathbb{Z}^{[m]} \otimes A_m \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \wedge^{[k]}\Psi(f)\otimes 1} & = & \Big\downarrow {\scriptstyle h^m_k} \\ \wedge^{[k]}\mathbb{Z}^{[n]} \otimes A_n & \xrightarrow{\quad h^n_k \quad} & C_k \end{array} \Big\},$$

which is in bijection with elements of

$$Z_0 S\mathcal{A}(A_*, \underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[\bullet]}\mathbb{Z}^{[*]}, C_\bullet)) \cong S\mathcal{A}(A_*, Z_0\,\underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[\bullet]}\mathbb{Z}^{[*]}, C_\bullet)),$$

where the simplicial structure of $\underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[\bullet]}\mathbb{Z}^{[*]}, C_\bullet)$ and $Z_0\,\underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[\bullet]}\mathbb{Z}^{[*]}, C_\bullet)$ comes from the cosimplicial structure of $\wedge^{[\bullet]}\mathbb{Z}^{[*]}$. So we define $K : \mathsf{Ch}_{\geqslant 0}(\mathcal{A}) \to S\mathcal{A}$ via $(KC)_* = Z_0\,\underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^{[\bullet]}\mathbb{Z}^{[*]}, C_\bullet)$ and this functor is right adjoint to the equivalence N. Hence, K is an equivalence, quasi-inverse to N.