Нехай Δ – категорія з об'єктами $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$, $n \geqslant 0$, і неспадними відображеннями $f : [n] \to [m]$ як морфізмами. Її стандартні твірні суть ін'єкції $\partial^i = \partial^i_n : [n-1] \to [n]$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $i \notin \operatorname{Im} \partial^i$ (кограні) і сюр'єкції $\sigma^j = \sigma^j_n : [n+1] \to [n]$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $\sigma^j(j) = \sigma^j(j+1) = j$ (ковироджения).

Для $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ позначимо $f \cdot g = g \circ f = (X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z)$ їх композицію.

1 Задача. Виконані косимпліціальні тотожності

$$\begin{cases} \partial^j \circ \partial^i = \partial^i \circ \partial^{j-1}, & \text{якщо } i < j, \\ \sigma^j \circ \partial^i = \partial^i \circ \sigma^{j-1}, & \text{якщо } i < j, \\ \sigma^j \circ \partial^j = 1 = \sigma^j \circ \partial^{j+1}, & \\ \sigma^j \circ \partial^i = \partial^{i-1} \circ \sigma^j, & \text{якщо } i > j+1, \\ \sigma^j \circ \sigma^i = \sigma^i \circ \sigma^{j+1}, & \text{якщо } i \leqslant j. \end{cases}$$

2 Задача. Для $0 \leqslant j < n$ маємо ідемпотент

$$P^j = \big([n] \xrightarrow{\sigma^j} [n-1] \xrightarrow{\partial^j} [n]\big).$$

3 Задачі. (a)

$$\partial^i \cdot P^j = \begin{cases} P^{j-1} \cdot \partial^i, & \text{якщо } i < j, \\ \partial^j, & \text{якщо } i = j \text{ або } i = j+1, \\ P^j \cdot \partial^i, & \text{якщо } i > j+1. \end{cases}$$

(b)

$$P^i \cdot \sigma^j = \begin{cases} \sigma^j \cdot P^i, & \text{якщо } i < j, \\ \sigma^i, & \text{якщо } i = j \text{ або } i = j+1, \\ \sigma^j \cdot P^{i-1}, & \text{якщо } i > j+1. \end{cases}$$

Означимо морфізм $\pi^k \in \mathbb{Z}\Delta([n],[n])$, $0 \leqslant k < n$, за допомогою свого роду формули включення–виключення

$$\pi^k \overset{\text{def}}{=} \sum_{k \geqslant i_q > i_{q-1} > \dots > i_2 > i_1 \geqslant 0}^{q \geqslant 0} (-1)^q P^{i_q} \cdot P^{i_{q-1}} \cdot \dots \cdot P^{i_2} \cdot P^{i_1}.$$

(c) Для всіх $0 \leqslant i \leqslant k$ ми маємо $\partial^i \cdot \pi^k = 0$.
(d) Для всіх $0 \leqslant j \leqslant k$ ми маємо $\pi^k \cdot \sigma^j = 0$.
(e) Для всіх $0 \leqslant l, k < n$ ми маємо $\pi^l \cdot \pi^k = \pi^{\max\{l,k\}}$. Зокрема, π^k є ідемпотентом.