

Квантові обчислення

Лекція 14

Київський академічний університет

22 травня 2025

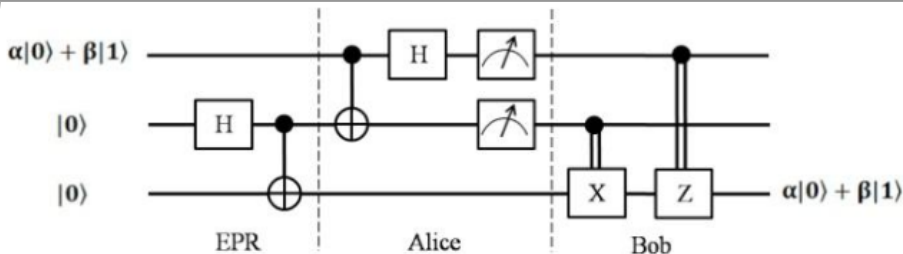
Припустимо, що Аліса має кубіт у невідомому стані $|\psi\rangle$. Задача полягає в передачі цього стану Бобу, тобто він повинен отримати доступ до кубіту в тому ж самому стані $|\psi\rangle$.

Якщо є можливість передати кубіт фізично, то така передача вирішує проблему. Але що, якщо такої можливості нема?

Виявляється, що якщо Аліса і Боб мають доступ до пари заплутаних кубітів (в кожного доступ до одного кубіту з пари), наприклад до стану Бела, та можливість передачі класичної інформації, то Аліса може передати стан $|\psi\rangle$ Бобу, не передаючи кубіт фізично.

Такий процес називається **квантовою телепортацією**.

Квантова телепортація



- 1 Аліса і Боб мають отримати доступ до стану Бела (на кубітах 2 та 3 на схемі). В реальності його може створити третій учасник, який передасть кубіти відповідно Алісі та Бобу. Це може бути зроблено задовго до початку телепортації.
- 2 Коли Аліса отримує кубіт 1 в невідомому стані, вона заплутує його зі своїм кубітом 2 і проводить вимірювання обох кубітів. Результат вимірювання відправляється Бобу.
- 3 Боб застосовує операції X та Z до свого кубіту в залежності від результатів, переданих Алісою.

Квантова телепортація. Доведення.

Позначимо 4 стани Бела як

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, & |\Phi^-\rangle &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, & |\Psi^-\rangle &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що

$$|\Phi^-\rangle = Z_2 |\Phi^+\rangle, \quad |\Psi^+\rangle = X_2 |\Phi^+\rangle, \quad |\Psi^-\rangle = X_2 Z_2 |\Phi^+\rangle.$$

До початку телепортації система перебуває в стані

$$(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |000\rangle + \alpha |011\rangle + \beta |100\rangle + \beta |111\rangle)$$

який після заплутування Алісою її кубітів перейде в стан

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha | +00\rangle + \alpha | +11\rangle + \beta | -10\rangle + \beta | -01\rangle)$$

Стан

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha | +00\rangle + \alpha | +11\rangle + \beta | -10\rangle + \beta | -01\rangle)$$

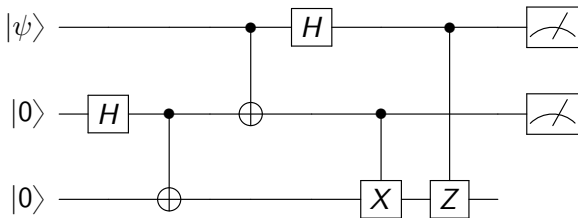
можна переписати як

$$\frac{1}{2} \left(|00\rangle \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) + |10\rangle \otimes (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) + |01\rangle \otimes (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) + |11\rangle \otimes (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) \right).$$

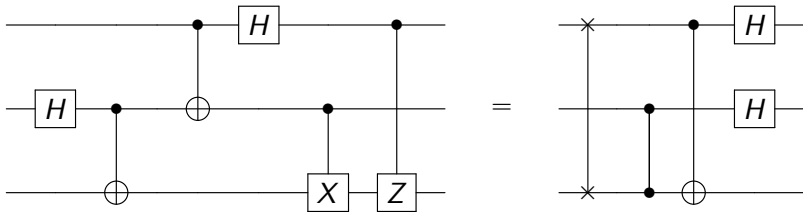
При вимірюванні перших двох кубітів третій стан сколапсує до одного з чотирьох випадків $\alpha |0\rangle \pm \beta |1\rangle$, $\alpha |1\rangle \pm \beta |0\rangle$, в залежності від результату вимірювання. Тож знаючи результат вимірювання, Боб може отримати стан $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, застосувавши відповідні операції X та Z до свого кубіта 3.

Квантова телепортація. Доведення 2.

По іншому це можна довести використовуючи принцип відкладеного вимірювання. Схема телепортації еквівалентна до



Наступна рівність є еквівалентністю між схемами

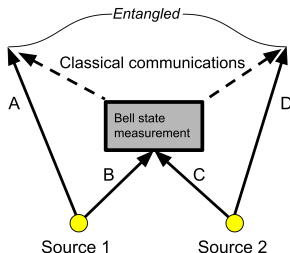


Тож при телепортації відбувається своп кубітів 1 та 3.

Квантова телепортація. Своп заплутування.

З попереднього доведення видно, що схема телепортації працює і у випадку, коли телепортований кубіт знаходиться в змішаному стані чи заплутаний з якимись іншими кубітами.

В останньому випадку це дозволяє зробити своп заплутування: якщо серед чотирьох частинок A, B, C, D заплутані A з B, та C з D, то можна отримати заплутування A з D просто телепортувавши стан B до D використовуючи заплутаність C з D.



Для телепортації n кубітів потрібно мати відповідну кількість n пар заплутаних кубітів (в стані Бела), розподілених між Алісою та Бобом. Знову ж таки, з попереднього випливає, що можна телепортувати й заплутаний стан на цих n кубітах.

В протоколі телепортації не обов'язково мати розподілений стан Бела $|\Phi^+\rangle$, згодиться й будь-який інший максимально заплутаний стан (тільки схему треба буде модифікувати).

Припустимо, що в протоколі телепортації Аліса і Боб мають доступ до $(I \otimes U) |\Phi^+\rangle$ замість звичайного стану Бела $|\Phi^+\rangle$. Після вимірювань Алісою, Боб отримає стан $U|\psi\rangle$, $UX|\psi\rangle$, $UZ|\psi\rangle$, чи $UZX|\psi\rangle$ в залежності від результатів вимірювання Аліси. Ці стани можна переписати як

$$U|\psi\rangle, (UXU^\dagger)U|\psi\rangle, (UZU^\dagger)U|\psi\rangle, (UZ XU^\dagger)U|\psi\rangle.$$

Тож, знаючи результати вимірювання, Боб може отримати стан $U|\psi\rangle$, застосувавши відповідну операцію серед чотирьох $I, UXU^\dagger, UZU^\dagger, UZ XU^\dagger$. В деяких випадках таку спряжену операцію можна реалізувати простіше ніж U . Наприклад, $TX T^\dagger = e^{-i\pi/4} SX$.

Залишається питання як згенерувати $(I \otimes U) |\Phi^+\rangle$ без доступу до U .

Не важко бачити, що $(I \otimes U) |\Phi^+\rangle$ стабільний відносно $M = X \otimes UXU^\dagger$ та $N = Z \otimes UZU^\dagger$. Тож, щоб його зегенерувати, використовуємо прийом зі стабілізаторного формалізму: стан $|00\rangle$ вимірюємо відносно операторів M та N . Якщо результат $(+1, +1)$, то шуканий стан отримано. Якщо ні, то проводимо корекцію.

Наприклад, результат $(-1, +1)$ означає, що ми отримали стан $(I \otimes U) |\Phi^-\rangle$ замість шуканого. Щоб перевести його до $(I \otimes U) |\Phi^+\rangle$, достатньо застосувати $Z \otimes I$.

Вимірювання відносно M та N можна реалізувати відмовостійким чином в деяких випадках. А значить, це дає можливість реалізовувати U у відмовостійкий спосіб.

В протоколі телепортації йде передача невідомого стану кубіту за допомогою заплутаного стану та двох класичних бітів. Модифікувавши цей протокол, можна передати два класичні біти за допомогою пересилки одного фізичного кубіту. Це називають суперщільним кодуванням.

