Квантові обчислення

Лекція 2

Київський академічний університет

17 лютого 2025

Унітарні перетворення кубіту. Матриці Паулі.

Матриці Паулі:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вони задовольняють

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I, \; XYZ = iI, \; ZYX = -iI,$$

$$XY = -YX, \; YZ = -ZY, \; ZX = -XZ.$$

I, X, Y, Z утворюють базис в просторі матриць 2×2.

Унітарні перетворення кубіту.

Матриці повороту відносно x,y та z:

$$R_x(\theta) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)X = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$R_y(\theta) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)Y = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)Z = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Матриця Адамара H та *фазові зсуви* S та T:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

Унітарні перетворення кубіту.

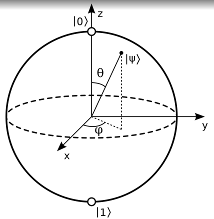
Будь-яку унітарну матрицю $U \in L(H)$ можна зобразити як $U = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, де $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Звідси можна отримати наступний загальний вигляд

$$U = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} e^{-i\beta-i\delta}\cos(\gamma/2) & -e^{-i\beta+i\delta}\sin(\gamma/2) \\ e^{i\beta-i\delta}\sin(\gamma/2) & e^{i\beta+i\delta}\cos(\gamma/2) \end{pmatrix}.$$

Тож будь-яку унітарну матрицю можна записати як

$$U = e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta).$$

Сфера Блоха.



Кожний чистий стан кубіту можна задати вектором

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle,$$

де $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$. Це можна зобразити як точку з координатами

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

на дійсній трьохвимірній одиничній сфері з центром у $(0, 0, 0)$. Зокрема, $|0\rangle$ це точка $(0, 0, 1)$, а $|1\rangle$ це точка $(0, 0, -1)$. Інтерактивна сфера Блоха – `https://javafxpert.github.io/grok-bloch/`

Сфера Блоха.

Також цей же зв'язок можна записати як

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(I + a_x X + a_y Y + a_z Z).$$

Звідси можна отримати, що

$$a_x = \langle\psi|X|\psi\rangle, \quad a_y = \langle\psi|Y|\psi\rangle, \quad a_z = \langle\psi|Z|\psi\rangle,$$

де використано циклічність сліду $\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|X) = \langle\psi|X|\psi\rangle$.

Дія гейту $R_z(\gamma)$ на $|\psi\rangle$ відповідає повороту на сфері Блоха навколо осі z на кут γ проти годинникової стрілки. Аналогічно для гейтів $R_x(\gamma)$ та $R_y(\gamma)$.

Це по суті задає ізоморфізм між поворотами в $\mathbb{R}^3$ та унітарними однокубітними гейтами:

$$SO(3) \cong SU(2)/\langle -I\rangle$$

Універсальні набори однокубітних гейтів

Скінченна множина G однокубітних гейтів називається *універсальною*, якщо будь-який унітарний гейт можна отримати як добуток скінченної кількості елементів з G.
Наприклад, усі повороти $\{R_y(\theta), R_z(\theta)\}$ є універсальною множиною.

Скінченна множина G однокубітних гейтів називається *апроксимативно універсальною*, якщо будь-який унітарний гейт можна як завгодно точно наблизити добутком скінченної кількості елементів з G.
Наприклад, пара гейтів $\{H, T\}$ є апроксимативно універсальною. Будь-яка пара поворотів U, V відносно різних осей, і така, що UV є ірраціональним поворотом, є апроксимативно універсальною.

Теорема Соловея-Кітаєва дає оцінку кількості гейтів з універсального набору потрібних для апроксимації.

Завдання

1. $|v\rangle = Y\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(|0\rangle + 2\,|1\rangle)\right)$. Вимірюємо $|v\rangle$ у базисі $|+\rangle, |-\rangle$. Знайти ймовірності $+, -$.

2. Нехай $(a_x, a_y, a_z) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ на сфері Блоха. Знайти відповідний стан $|v\rangle$.

3. $|v\rangle = R_z(-\pi/4)\,|+\rangle$. Знайти (a_x, a_y, a_z) на сфері Блоха.