Квантові обчислення

Лекція 1

Київський академічний університет

10 лютого 2025

Нотація Дірака.

$H = \mathbb{C}^d -$ комплексний гільбертів простір розмірності d.

Стандартний базис:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ |d-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Будь-який вектор (кет вектор):

$$|v\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \, |i\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Нотація Дірака.

Спряжений вектор (бра вектор):

$$\langle v| = |v\rangle^\dagger = (\overline{\alpha_0} \quad \overline{\alpha_1} \quad \dots \quad \overline{\alpha_{d-1}}).$$

Скалярний добуток: якщо $|w\rangle = \sum_i \beta_i |i\rangle$, то

$$\langle v|w\rangle = \langle v| \cdot |w\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \overline{\alpha_i}\beta_i.$$

Маємо що $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|v\rangle}$.
Норма вектору: $||\,|v\rangle\,|| = \sqrt{\langle v|v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{d-1} |\alpha_i|^2}$.

Ортонормований базис $|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle$:

$$\langle v_i|v_i\rangle = 1, \quad \langle v_i|v_j\rangle = 0, i \neq j.$$

Дія матриць.

Дія матриці на вектор: $A\,|v\rangle = A \cdot |v\rangle$, $\langle w|\,A = \langle w| \cdot A$.
Зокрема, $\langle i|A|j\rangle$ це елемент A на місці ij.

Спряжена матриця: $A^\dagger = \overline{A}^T$. Маємо що $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Оператор проєктування на $|v\rangle$: $P_v = |v\rangle\langle v|$. $P_v\,|w\rangle = |v\rangle\langle v|w\rangle$.

Самоспряжена матриця: $A = A^\dagger$. За спектральною теоремою завжди існує розклад

$$A = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i\,|v_i\rangle\langle v_i|\,,$$

де λ_i власні числа, а $|v_i\rangle$ відповідні власні вектори, що утворюють ортонормований базис.

Унітарні оператори.

Матриця U називається унітарною, якщо вона зберігає скалярні добутки між векторами, зокрема, ортонормований базис переводиться в ортонормований.

Це еквівалентно тому, що $U^\dagger U = I$, тобто її стовпчики утворюють ортонормований базис (так само й рядки). Стовпчики U дорівнюють $U\left|i\right\rangle$, тож це є ортонормований базис, в який переходить стандартний під дією U.

Навпаки, будь-який ортонормований базис $\left|v_i\right\rangle$ можна отримати зі стандартного унітарним оператором

$$U = \sum_i \left|v_i\right\rangle\left\langle i\right| .$$

Звідси слідує, що будь-який ОНБ можна перевести в будь-який інший унітарним оператором (причому єдиним чином), і що добуток унітарних операторів є унітарним.

Тензорні добутки.

Для матриць $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{k,l}$, $B = [b_{mn}]_{m=1,n=1}^{p,q}$ розмірів $k \times l$ та $p \times q$ відповідно їх тензорним добутком (добутком Кронекера) називають матрицю

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,l}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,l}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1}B & a_{k,2}B & \dots & a_{k,l}B \end{pmatrix} = [a_{ij}b_{mn}]$$

розміру $kp \times lq$.
Зокрема, для вектор-стовпчиків $|v\rangle$ та $|w\rangle$ розміру k та p їх тензорним добутком буде вектор-стовпчик $|v\rangle \otimes |w\rangle$ розміру kp.

Не важко персвідчитись, що якщо множина $\{|i\rangle \otimes |m\rangle \mid i = 0, \dots, k-1,\ m = 0, \dots, p-1\}$ впорядкована лексикографічно, тобто $|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, \dots, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle, \dots, |k\rangle \otimes |m-1\rangle, |k\rangle \otimes |m\rangle$, то, вона співпадає зі стандартним базисом в $\mathbb{C}^{kp}$.

Тензорні добутки.

Тензорний добуток є асоціативною операцією та лінійною по обидвох аргументах, тобто $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$ та

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \otimes B = \alpha_1 (A_1 \otimes B) + \alpha_2 (A_2 \otimes B).$$

Виконуються наступні корисні властивості: $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$.
Властивість змішаного добутку:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD,$$

якщо розміри узгоджені.
Зокрема, для векторів:

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = A\,|v\rangle \otimes B\,|w\rangle\,.$$

Постулати квантової механіки.

Постулат 1. Квантовій фізичній системі можна поставити у відповідість комплексний гільбертів простір H. Станами системи є вектори $|v\rangle \in H$ одничної довжини, тобто $\langle v|v\rangle = 1$. При цьому вектори, які відрізняються *глобальною фазою* $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, тобто $|u\rangle = e^{i\theta}|v\rangle$, вважаються еквівалентними станами (їх неможливо розрізнити фізично), $|u\rangle \sim |v\rangle$.

Найпростішим прикладом є *кубіт* — система розмірності 2, $H = \mathbb{C}^2$. Станами є вектори $|v\rangle = a_0\,|0\rangle + a_1\,|1\rangle$, $a_i \in \mathbb{C}$, $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Числа a_i називають *амплітудами*.

Кажуть, що стан $|v\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ знаходиться у *суперпозиції* відносно стандартного базису, якщо він не еквівалентний до базисного стану, тобто $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$. При цьому відносна фаза вже грає роль.
Наприклад, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ та $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)$ це вже різні стани, якщо $e^{i\theta} \neq 1$.

Постулати квантової механіки.

Постулат 2. Вимірювання стану системи.
Нехай $\{|b_0\rangle, \ldots, |b_{d-1}\rangle\}$ це ортонормований базис $H = \mathbb{C}^d$.
Вимірюванню фон Неймана відповідає набір ортопроекторів $P_i = |b_i\rangle\langle b_i|$,

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_{d-1} = I.$$

Результатом вимірювання стану $|v\rangle \in H$ буде індекс i з ймовірністю $p_i = \mathrm{Tr}(P_i|v\rangle\langle v|) = |\langle b_i|v\rangle|^2$. При цьому система переходить у новий стан $P_i\,|v\rangle/\sqrt{p_i} \sim |b_i\rangle$.

Для кубіту прикладом є вимірювання $|v\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ у стандартному базисі. Результатом вимірювання буде 0 з ймовірністю $|a_0|^2$ (при цьому система перейде у стан $|0\rangle$), та 1 з ймовірністю $|a_1|^2$ (при цьому система перейде у стан $|1\rangle$).

Постулати квантової механіки.

Постулат 3. Унітарні перетворення станів.
Фізично стан замкненої квантової системи проходить детерміновану унітарну еволюцію в часі, що описується рівнянням Шредінгера.
В квантових обчисленнях та інформації вважається, що це контрольований процес. Тож вважається, що на стан $|v\rangle \in H$ ми можемо подіяти будь-яким унітарним перетворенням U щоб перевести систему у стан $U|v\rangle$, а сам по собі він не змінюється (якщо не вимірюється).

Процес вимірювання, що відповідає базису $\{|b_0\rangle, \ldots, |b_{d-1}\rangle\}$, застосований до стану $|v\rangle$, еквівалентний до вимірювання стану $U^\dagger |v\rangle$ у стандартному базисі, із застосуванням U до кінцевого стану, де $U|i\rangle = |b_i\rangle$, $\forall i$ (тобто $U = \sum_i |b_i\rangle\langle i|$).

Постулати квантової механіки.

Постулат 4. Композиції квантових систем.
Якщо є дві квантові системи, яким відповідають гільбертові простори H_1 та H_2, то сукупній системі відповідає гільбертів простір $H_1 \otimes H_2$. При цьому якщо перша система перебуває у стані $|v_1\rangle \in H_1$, а друга у стані $|v_2\rangle \in H_2$, то сукупна система перебуває у стані $|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \in H_1 \otimes H_2$.

Але сукупна система може перебувати і в станах, які не можна виразити як $|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle$, а лише як їх лінійні комбінації (суперпозиції). Такі стани називають *заплутаними*.