HOMOTOPY THEORY

СЕРГІЙ МАКСИМЕНКО

Зміст

1. Означення

Означення 1.0.1. *Нехай X та Y — топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається* ***неперервним****, якщо прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої підмножини $V \subset Y$ є відкритим в X.*

Означення 1.0.2. *Відображення $f : X \to Y$ називається* ***гомеоморфізмом****, якщо воно неперервне, бієктивне і обернене до нього є також неперервним.*

Означення 1.0.3. *Нехай $A \subset X$ — підмножина. Відображення $r : X \to A$ називається* ***ретракцією****, якщо r нерухоме на A, тобто $r(a) = a$ для всіх $a \in A$.*

Означення 1.0.4. *Нехай $I = [0, 1]$ — замкнутий відрізок. Будь-яке неперервне відображення $f : X \times [0, 1] \to Y$ називається* ***гомотопею****.*

Для кожного $t \in [0, 1]$ визначимо відображення $f_t : X \to X$ за формулою: $f_t(x) = f(x, t)$. Тоді відображення f_0 та f_1 називаються ***гомотопними****, а $f : X \times [0, 1] \to Y$ є* ***гомотопією між f_0 та f_1****.*

Означення 1.0.5. *Нехай $A \subset X$ — підмножина.* ***Деформацією*** *A по X називається будь-яка гомотопія $f : A \times [0, 1] \to X$ така, що $f_0 = \mathrm{id}_A : A \subset X$ є тотожним вкладенням A в X, тобто $f(a, 0) = a$ для всіх $a \in A$.*

Означення 1.0.6. *Нехай $A \subset X$ — підмножина.* ***Деформаційною ретракцією*** *X на A називається будь-яка ретракція $r : X \to A$ яка гомотопна тотожному відображенню id_X, тобто гомотопія $f : X \times [0, 1] \to X$ така, що*

- $f_0 = \mathrm{id}_X$,
- $f_1(X) = A$
- $f_1(a) = a$ *для всіх* $a \in A$.

Таку гомотопію f також називають ***деформаційною ретракцією****.*

Деформаційна ретракція $f : X \times [0, 1] \to X$ простору X на підмножину A називається ***сильною****, якщо f нерухома на A, тобто $f(a, t) = a$ для всіх $a \in A$ і $t \in [0, 1]$.*

Означення 1.0.7. *Неперервне відображення $f : X \to Y$ називається* ***гомотопійною еквівалентністю****, якщо існує відображення $g : Y \to X$ таке, що $f \circ g : Y \to Y$ гомотопне id_Y, а $g \circ f : X \to X$ гомотопне id_X:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "\simeq \mathrm{id}_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\simeq \mathrm{id}_Y"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Означення 1.0.8. ***Конусом*** *над топологічним простором X називається фактор-простір $CX = X \times [0, 1]/\{X \times 1\}$. Множина $X \times 0$ називається* ***основою****, а точка $\{X \times 1\}$ —* ***вершиною*** *конусу.*

Означення 1.0.9. ***Надбудовою*** *над топологічним простором X називається фактор-простір $SX = CX/\{X \times 0\}$.*

Означення 1.0.10. *Топологічний простір X називається* ***стягуваним*** *в точку $a \in X$, якщо тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X \to X$ гомотопне постійному відображенню X в a.*

1.1. **Позначення.**

- $I = [0,1]$ — одиничний відрізок;
- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ — одиничний шар в $\mathbb{R}^n$, або n-диск;
- $S^n = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ — одинична сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, межа одиничного $(n+1)$-диску;

1.2. **Фактор-простори.** Нехай $\Delta = \{A_i\}_{i \in Y}$ — розбиття топологічного простору X, тобто

- $X = \bigcup\limits_{i \in Y} A_i$;
- $A_i \neq \varnothing$ для всіх $i \in Y$;
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j \in Y$.

Визначимо відображення $p : X \to Y$ за правилом $p(x) = i$ тоді і лише тоді, коли $x \in A_i$.

Наділимо Y фактор-топологією: тобто множина $B \subset Y$ називатиметься відкритою тоді і лише тоді, коли $p^{-1}(B)$ є відкритою в X. Отриманий топологічний простір Y називатиметься *фактор-простором* X за розбиттям Δ.

2. Гомеоморфізми

Задача 2.1. Нехай $f : X \to Y$, та $g : Y \to Z$ — гомеоморфізми. Довести, що їх композиція $g \circ f : X \to Z$ — є також гомеоморфізмом.

Задача 2.2. Нехай X — топологічний простір. Довести, що множина $H(X)$ всіх гомеоморфізмів $f : X \to X$ утворює групу відносно композиції.

3. Ретракції

Задача 3.1. Нехай $A \subset X$ — підмножина і $i : A \subset X$ — відображення вкладення. Довести, що відображення $f : X \to A$ є ретракцією тоді і лише тоді, коли $f \circ i = \mathrm{id}_A : A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} A$ є тотожним відображенням.

Задача 3.2. Нехай $B \subset A \subset X$ — дві підмножини і $f : X \to A$ та $g : A \to B$ — ретракції. Довести, що їх композиція $g \circ f : X \to B$ — є також ретракцією.

Задача 3.3. Довести, що ретракт хаусдорфового простору є замкнутою підмножиною.

4. Факторні відображення та фактор-простори

Задача 4.1. Припустимо, що в наступній комутативній діаграмі відображень

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\text{(сюр'єктивне)}\quad f"] \arrow[dr, "\text{(факторне)}\quad p"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

відображення $p : X \to Z$ — факторне, а відображення $f : X \to Y$ — сюр'єктивне. Довести, що тоді $f : X \to Y$ — неперервне тоді і лише тоді, коли неперервним є $g : Z \to Y$.

Задача 4.2. Нехай $A \subset X$ — підмножина, X/A — фактор-простір, отриманий стисненням A в точку, і $p : X \to X/A$ — фактор-відображення. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відображення таке, що $f(A)$ є точкою. Визначимо відображення $\hat{f} : X/A \to Y$ за формулою

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & p^{-1}(x) \notin A, \\ f(A), & p^{-1}(x) \in A. \end{cases}$$

Тоді має місце комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & X/A \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Довести, що $\hat{f}$ є неперервним відносно фактор-топології на X/A.

Задача 4.3. Довести, що фактор-простір $[0,1]/\{0,1\}$ відрізка $[0,1]$ по його межі гомеоморфний до кола $S^1 = \{|z| = 1\}$.

Задача 4.4. Нехай $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\}$ — одиничний шар в $\mathbb{R}^n$ і $S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ — його межа, одинична сфера. Довести, що фактор-простір D^n/S^{n-1} гомеоморфний до сфери S^n.

5. Гомотопії

Задача 5.1. Нехай X, Y — два топологічних простори. Довести, що відношення гомотопності на множині неперервних відображень $X \to Y$ є відношенням еквівалентності.

6. Лінійно зв'язні простори

Задача 6.1. Довести, що топологічний простір X лінійно зв'язний тоді лі лише тоді, коли будь-які два відображення одноточкового простору $f, g : * \to X$ гомотопні.

7. Стягувані простори

Задача 7.1. Довести, що топологічний простір X є стягуваним, тоді і лише тоді, коли основа $X \times 0$ конусу CX над X є ректрактом CX.

Задача 7.2. Довести, що якщо топологічний простір X стягується в деяку точку a, то він стягується будь-яку іншу точку $b \in B$. Іншими словами, стягуваність простору не залежить від точки.

Задача 7.3. Довести, що будь-яка опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$ є стягуваною.

Задача 7.4. Нехай X — стягуваний топологічний простір і Y — лінійно зв'язний простір. Довести, що будь-які два неперервні відображення $f, g : X \to Y$ є гомотопними.

Задача 7.5. Нехай X — стягуваний топологічний простір. Довести, що будь-які два неперервні відображення $f, g : Y \to X$ є гомотопними.

8. Деформації

9. Гомотопічні еквівалентності

Задача 9.1. Довести, що будь-яка деформаційна ретракція $f : X \times [0, 1] \to X$ топологічного простору X на підмножину A є гомотопійною еквівалентністю.

Задача 9.2. Довести, що кожен гомеоморфізм $f : X \to Y$ є гомотопійною еквівалентністю.

Задача 9.3. Показати, що множина $\mathcal{E}(X)$ всіх гомотопійних еквівалентностей $f : X \to X$ топологічного простору X на себе утворює групу.